Memento matematică

Jurcone Ramiro

2026

Copyright © 2026 Jurcone Ramiro

Această lucrare este licenţiată sub Creative Commons
Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0).

Liberă pentru uz personal şi educaţional. Utilizarea comercială este interzisă.

Pentru informaţii: jurcone.sdfeu.org

Prefaţă

Prezenta lucrare are ca scop sintetizarea principalelor noţiuni de matematică din programa de liceu.

Motivul realizării lucrării este necesitatea existenţei într-o singura carte a formulelor de matematică, şi a principalelor metode de rezolvare a exerciţiilor tip, pentru a caror găsire este necesară altfel consultatea tuturor manualelor de liceu şi a multor culegeri.

Lucrarea se doreşte a fi o prezentare succintă şi la obiect a principalelor noţiuni, neavând pretenţia de a înlocui munca din culegeri specializate, din manual sau din culegeri de probleme cu subiecte de examen. Mai degrabă se doreşte a fi o introducere în studiul matematicii de liceu pe de o parte şi un manual de referinţă pentru consultarea operativa a principalelor formule şi metode de rezolvare.

Acest material conţine prezentarea teoretică a principalelor subiecte, câte un subiect pe o filă, adică pe două pagini fată/verso. Subiectele sunt notate după sistemul Memo 1, Memo 2,... ş.a.m.d.

În vederea susţinerii diverselor examene, se recomandă ca după parcurgerea prezentei lucrări, să se efectueze pregătire după o culegere de subiecte pentru tipul respectiv de examen, în vederea accentuării deprinderilor specifice acelui examen. Ca exemplu în acest sens, pot fi utile subiectele de examen din anii anteriori, respectiv culegeri editate în vederea susţinerii examenului din anul respectiv.

Cuprins

Nr	Conţinut	Clasa	Pagina
1	Geometrie plană	IX	7
2	Formule de trigonometrie	IX	9
3	Cercul trigonometric	IX	11
4	Graficele funcţiilor trigonometrice	X	13
5	Ecuaţii şi inecuaţii trigonometrice	X	15
6	Numere complexe	X	17
7	Formule de algebră	IX	19
8	Funcţia de gradul II	IX	21
9	Semnul funcţiei de gradul doi	IX	23
10	Funcţii injective, surjective, bijective	IX	25
11	Progresii aritmetice şi geometrice	IX	27
12	Funcţia exponentială	X	29
13	Logaritmi	X	31
14	Analiză combinatorie	X	33
15	Binomul lui Newton	X	35
16	Polinoame	X	37
17	Ecuaţii de grad superior	X	39
18	Ecuaţii de grad superior - Continuare	X	41
19	Determinanţi	XI	43
20	Matrici	XI	45
21	Matricea inversă. Rangul unei matrici	XI	47
22	Sisteme de ecuaţii liniare	XI	49
23	Compatibilitatea sistemelor de ecuaţii liniare	XI	51
24	Sisteme de ecuaţii liniare particulare	XI	53
25	Limite de şiruri	XI	55
26	Limite de funcţii	XI	57
27	Aplicaţii ale limitelor de funcţii	XI	59
28	Derivate	XI	61
29	Aplicaţii ale derivatelor	XI	63
30	Interpretarea geometrică a derivatei	XI	65
31	Integrale	XII	67
32	Tabel derivate şi tabel integrale	XII	69
33	Tabel derivate şi tabel integrale pe o pagină	XII	71
34	Structuri algebrice	XII	73
35	Anexă		75

Memo 1: Geometrie plana

Termeni utilizati:

- dreapta, semidreapta, segment, mediatoarea unui segment.
- drepte paralele, dreapta secantă, unghiuri alterne interne, unghiuri alterne externe, unghiuri corespondente
- bisectoarea unui unghi
- simetric: simetricul unui punct faţă de o dreaptă, simetrica unei drepte faţă de o dreaptă.
- unghiuri: ascuţite, obtuze, complementare, suplementare
- triunghiul : triunghiul oarecare, isoscel, echilateral, dreptunghic, triunghiuri egale (cazurile de egalitate),
- triunghiul : triunghiuri asemenea(cazurile de asemănare), teorema lui Thales.
- triunghiul : suma unghiurilor într-un triunghi, unghi exterior unui triunghi(ce este şi cum se calculează),
- triunghiul : linia mijlocie(ce este şi cum se calculează)
- triunghiul : Linii importante în triunghi:

• Bisectoarea: Împarte un unghi in două părţi egale. Orice punct de pe bisectoare este egal depărtat de laturile unghiului. Bisectoarele triunghiului se intersectează în centrul cercului înscris triunghiului.

• Mediana: Uneşte vârful unui triunghi cu mijlocul laturii opuse. Medianele triunghiului se intersectează în centrul de greutate G al triunghiului. G se află la două treimi de vârf şi la o treime de bază.

• Mediatoarea: Este perpendiculară pe mijlocul unui segment. Orice punct de pe mediatoare este egal depărtat de capetele segmentului. Mediatoarele triunghiului se intersectează în centrul cercului circumscris triunghiului.

• Înaltimea : Este perpendiculara dusă dintr-un vărf al triunghiului pe latura opusă. Înălţimile triunghiului se intersectează în ortocentrul triunghiului ("Orto" înseamnă drept în greacă)

Suprafaţa unui triunghi oarecare:

(1) S= $\frac{baza*\hat{i}naltimea}{2}$

(2) S= $\frac{b*c*sin(A)}{2}$

(3) S= $\frac{a*b*c}{4*R}$, unde R= raza cerc circumscris triunghiului (intersecţie mediatoare)

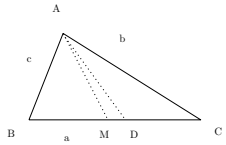
(4) $S = r*p$, unde r= raza cerc înscris triunghiului (intersecţie bisectoare), p= semiperimetrul=$\frac{a+b+c}{2}$

(5) S= $\sqrt{p*(p-a)*(p-b)*(p-c)}$, unde p=semiperimetrul . (Formula lui Heron)

(6) Idee utilă: Exprimarea suprafeţei în două moduri, în probleme şi aflarea necunoscutei

Teoreme în triunghiul oarecare

Fie triunghiul oarecare ABC, AD= mediană, AM= bisectoare



•Teorema sinusului: $\frac{a}{sin(A)} = \frac{b}{sin(B)} = \frac{c}{sin(C)} = 2 * R$, unde R=raza cercului circumscris triunghiului •Teorema cosinusului: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * cos(A)$ (Teorema lui Pitagora generalizată)

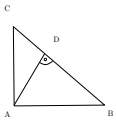
Menţiuni:- Pt. A=ascuţit, cos(A) > 0, deci $-2*b*c*cos(A)$ este o cantitate negativă

- Pt. A=obtuz, cos(A) < 0, deci $-2*b*c*cos(A)$ este o cantitate pozitivă

•Teorema medianei: $AD^2 = \frac{2*(AB^2+AC^2)-BC^2}{4}$

•Teorema bisectoarei: $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}$

Triunghiul dreptunghic Fie triunghiul dreptunghic ABC, A= 90° , AD $\perp$ BC



• Formulele pentru sin, cos, tg, ctg

• Valorile sin, cos, tg, ctg pentru 30, 60, 45 grade

• B=90-C, deci sin(B)=cos(C), cos(B)=sin(C), tg(B)=ctg(C), ctg(B)=tg(C), samd.

• Teorema lui Pitagora: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

• Teorema înalţimii: $AD^2 = DB * DC$

• Teorema catetei: $AB^2 = BC * DB$, respectiv $AC^2 = BC * DC$

• Cateta ce se opune la 30 grade= jumatate din ipotenuză

• S= $\frac{cateta*cateta}{2}$

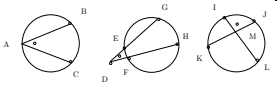
Poligoane care se pot descompune in triunghiuri

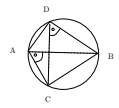
• Pătrat, dreptunghi, paralelogram, trapez, romb. Perimetre, suprafeţe, proprietăţi.

Cercul

• Diametrul=$2 * R$. Perimetrul P=$2 * \pi * R$. Suprafaţa S=$\pi * R^2$.

• Unghi **a) pe cerc**: $\hat{A} = \widehat{CAB} = \frac{BC}{2}$ **b)exterior:** $\hat{D} = \widehat{EDF} = \frac{GH-EF}{2}$ **c)interior:** $\hat{M} = \widehat{KML} = \frac{IJ+KL}{2}$ conform figurii:





Patrulaterul inscriptibil Fie patrulaterul inscriptibil ABCD:

• Suma unghiurilor opuse este 180 grade, adica $\hat{A} + \hat{B} = 180$, respectiv $\hat{C} + \hat{D} = 180$.

• Unghiul format de o diagonală cu una din laturi, este egal cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă, adică de exemplu $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$.

Memo 2: Formule de trigonometrie:

$$sin(x) = \frac{cateta \quad opusă}{ipotenuză}$$

$$cos(x) = \frac{cateta \quad alaturată}{ipotenuză}$$

$$tg(x) = \frac{cateta \quad opusă}{cateta \quad alaturată}$$

$$ctg(x) = \frac{cateta \quad alaturată}{cateta \quad opusă}$$

$$tg(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

$$ctg(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$

$$tg(x) = \frac{1}{ctg(x)}$$

$$ctg(x) = \frac{1}{tg(x)}$$

$sin(x) = cos(\frac{\pi}{2} - x)$ $cos(x) = sin(\frac{\pi}{2} - x)$ $tg(x) = ctg(\frac{\pi}{2} - x)$ $ctg(x) = tg(\frac{\pi}{2} - x)$

Formula fundamentală a trigonometriei :

$$sin^2 x + cos^2 x = 1$$

Utile: $cos^2(x) = \frac{1}{1+tg^2(x)}$ $sin^2(x) = \frac{tg^2(x)}{1+tg^2(x)}$

Dacă notăm $tg\frac{x}{2} = t$, atunci sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x) se pot exprima în funcţie de $tg\frac{x}{2}$ astfel:

$sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ $cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $tg(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} = \frac{2t}{1-t^2}$ $ctg(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)} = \frac{1-t^2}{2t}$

$$sin(a+b) = sin(a) * cos(b) + cos(a) * sin(b)$$
$$sin(a-b) = sin(a) * cos(b) - cos(a) * sin(b)$$
$$cos(a+b) = cos(a) * cos(b) - sin(a) * sin(b)$$
$$cos(a-b) = cos(a) * cos(b) + sin(a) * sin(b)$$

$$sin(2a) = 2 * sin(a) * cos(a)$$
$$cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a)$$
$$cos(2a) = 2 * cos^2(a) - 1$$
$$cos(2a) = 1 - 2 * sin^2 a$$
$$sin(3a) = sin(a + 2a) = s.a.m.d.$$
$$cos(3a) = cos(a + 2a) = s.a.m.d.$$

$$sin(\frac{a}{2}) = +- \sqrt{\frac{1-cos(a)}{2}}$$

$$cos(\frac{a}{2}) = +- \sqrt{\frac{1+cos(a)}{2}}$$

$$tg(\frac{a}{2}) = +- \sqrt{\frac{1-cos(a)}{1+cos(a)}}$$

$$ctg(\frac{a}{2}) = +- \sqrt{\frac{1+cos(a)}{1-cos(a)}}$$

$$tg(a+b) = \frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)*tg(b)}$$

$$tg(a-b) = \frac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a)*tg(b)}$$

$$ctg(a+b) = \frac{ctg(a)*ctg(b)-1}{ctg(a)+ctg(b)}$$

$$ctg(a-b) = \frac{1+ctg(a)*ctg(b)}{ctg(b)-ctg(a)}$$

$$tg(a+b+c) = tg([a+b]+c) = \frac{tg[a+b]+tg(c)}{1-tg[a+b]*tg(c)} = s.a.m.d.$$

$$ctg(a+b+c) = ctg([a+b]+c) = \frac{ctg[a+b]*ctg(c)-1}{ctg[a+b]+ctg(c)} = s.a.m.d.$$

$$sin(a)*cos(b) = \frac{sin(a+b)+sin(a-b)}{2}$$

$$cos(a)*cos(b) = \frac{cos(a+b)+cos(a-b)}{2}$$

$$cos(a)*sin(b) = \frac{sin(a+b)-sin(a-b)}{2}$$

$$sin(a)*sin(b) = \frac{cos(a-b)-cos(a+b)}{2}$$

$$sin(a)+sin(b) = 2*sin(\frac{a+b}{2})*cos(\frac{a-b}{2})$$

$$sin(a)-sin(b) = 2*cos(\frac{a+b}{2})*sin(\frac{a-b}{2})$$

$$cos(a)+cos(b) = 2*cos(\frac{a+b}{2})*cos(\frac{a-b}{2})$$

$$cos(a)-cos(b) = -2*sin(\frac{a+b}{2})*sin(\frac{a-b}{2})$$

Cercul trigonometric

Scrieţi sin(x),cos(x),tg(x),ctg(x) pentru x=$30°, 45°, 60°$ si respectiv $0°, 90°, 180°, 270°, (360)°$

Memo 3: Cercul trigonometric

Definitie:

Cercul trigonometric este un cerc cu raza R egala cu 1 (egala cu unitatea)

Consecinta 1: Exprimare unghiuri in radieni

- Lungime cerc= 2π R = 2π*1= 2π
- Lungime cerc = parcurgerea intregului cerc, adica 360 grade
- Deci Lungime cerc = 2π = 360
- Prin urmare: 360 grade = 2π 180 grade = π 90 grade = $\frac{\pi}{2}$ 270 grade = $\frac{3\pi}{2}$
- se ajunge astfel la notiunea de **radiani**, calculabil prin regula de 3 simpla.

De exemplu ne intereseaza cati radieni inseamna 45 grade.

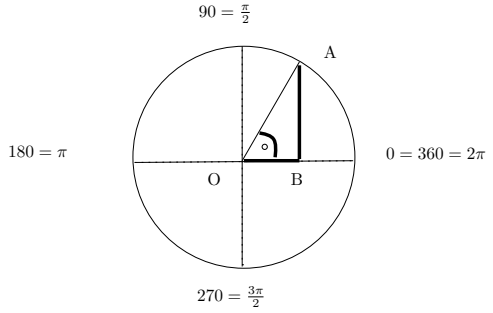
Se porneste de la : 180 grade ..... π 45 grade(exemplu)..... x

Se scoate x

Consecinta 2: Aflare sin, cos, tg, ctg pentru 0, 90, 180, 270, 360 grade Fie cercul trigonometric de mai jos, deci raza R=1.

sin(x)=$\frac{AB}{OA}$= $\frac{AB}{R=1}$ = AB, deci segmentul **AB inseamna sin(x)**

cos(x)=$\frac{OB}{OA}$= $\frac{OB}{R=1}$ =OB, deci segmentul **OB inseamna cos(x)**



1)Pentru x=0 grade, AB devine 0 iar OB devine 1(egal cu raza R=1),
deci sin(0)=0, cos(0)=1, tg(0) = $\frac{0}{1}$=0, ctg(0)=$\frac{1}{0}$ =∞

2)Pentru x=90 grade, AB devine 1(egal cu R=1) iar OB devine 0,
deci sin(90)=1, cos(90)=0, tg(90) = $\frac{1}{0}$=∞, ctg(90)=$\frac{0}{1}$ =0

3)Pentru x=180 grade, AB devine 0 iar OB devine -1(egal cu raza R=1 in sens negativ),
deci sin(180)=0, cos(180)=-1, tg(180) = $\frac{0}{-1}$=0, ctg(180)=$\frac{-1}{0}$ =-∞

4)Pentru x=270 grade, AB devine -1(egala cu R=1 in sens negativ) iar OB devine 0,
deci sin(270)=-1, cos(270)=0, tg(270) = $\frac{-1}{0}$=-∞, ctg(270)=$\frac{0}{-1}$ =0

Consecinta 3: Valorile sin, cos, tg, ctg pentru unghiri mai mari de 360 grade

Se considera stiute din gimnaziu sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x) pentru x=30, 60, 45 grade:

Pentru x=30 sin(x)=$\frac{1}{2}$ cos(x)=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ rezulta tg=$\frac{sin(x)}{cos(x)}$ si ctg=$\frac{cos(x)}{sin(x)}$

Pentru x=60, deoarece 60=90-30, sin(60)=cos(30), cos(60)=sin(30), tg(60)=ctg(30), ctg(60)= tg(30), adica pentru x=60, sin(x)=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ cos(x)=$\frac{1}{2}$ rezulta tg=$\frac{sin(x)}{cos(x)}$ si ctg=$\frac{cos(x)}{sin(x)}$

Pentru x=45, deoarece triunghic dreptunghic este isoscel (catetele egale), tg(x)=$\frac{cateta\ opusa}{cateta\ alaturata}$=1, ctg(x)=$\frac{1}{tg(x)}$=1, catetele fiind egale si ipotenuza fiind aceeasi, sin(x)=cos(x) si anume egale cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$

adica pentru x=45, sin(x)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos(x)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$, tg(x)=1 si ctg(x)=1

Exemplul 1: Se cere sin(750)

Deoarece 360 grade inseamna **o rotatie completa,** , 750 grade inseamna 720(=360+360= doua rotatii si ajung tot la 0 grade)+30.

Prin urmare sin(750) inseamna ca punctul A este in aceeasi pozitie ca pentru 30 grade.

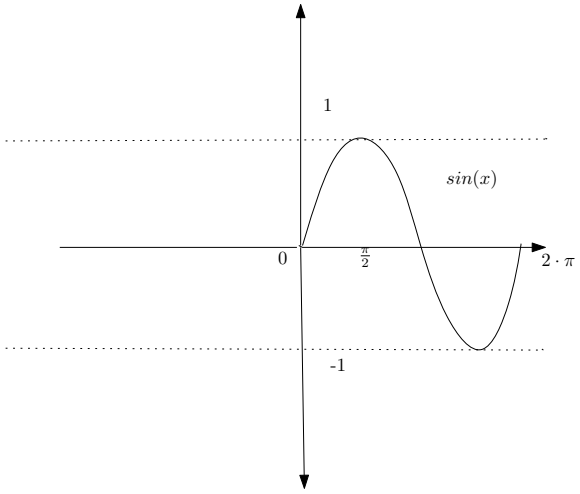
Adica sin(750)=sin(30)=$\frac{1}{2}$.

Identic si pentru cos(x), tg(x) , ctg(x), adica cos(750)=cos(30), tg(750)=tg(30), ctg(750)=ctg(30).

Exemplul 2: Se cere sin($\frac{13\pi}{4}$) Prima dată se transformă $\frac{13\pi}{4}$ în grade pentru a judeca mai uşor şi obţinem 585 grade, deci 585= 360+225, prin urmare avem o rotaţie completă şi apoi încă 225 grade. Deci sin($\frac{13\pi}{4}$)= sin(2π +$\frac{5\pi}{4}$)= -$\frac{\sqrt{2}}{2}$. (cadranul 3, sinus negativ, egal cu -sin($\frac{\pi}{4}$))

Memo 4 Graficele functiilor trigonometrice

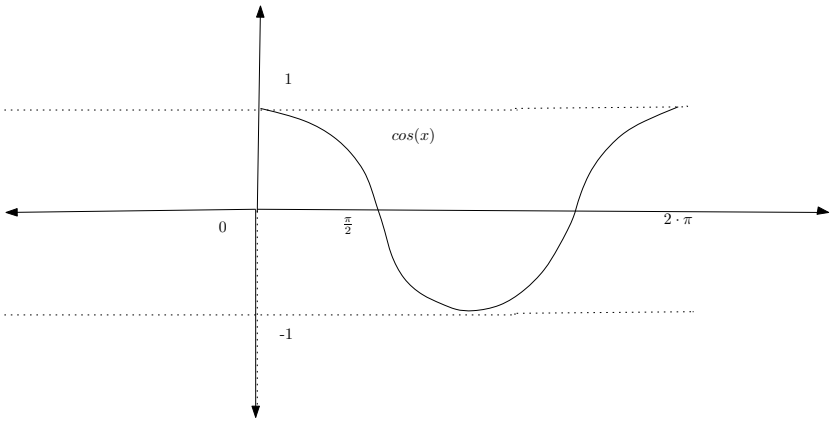
sin(x) : R $\rightarrow [-1, +1]$



Functia sin(x) are perioada $2 \cdot \pi$, este impara, este definita de R, ia valori intre -1 si +1 si este bijectiva pentru x $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Deci restrictia bijectiva sin(x) : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, +1]$ admite o functie inversa, arcsin(x) : $[-1, +1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, al carei grafic este simetric in raport cu sin(x) fata de bisectoarea intai, y=x.

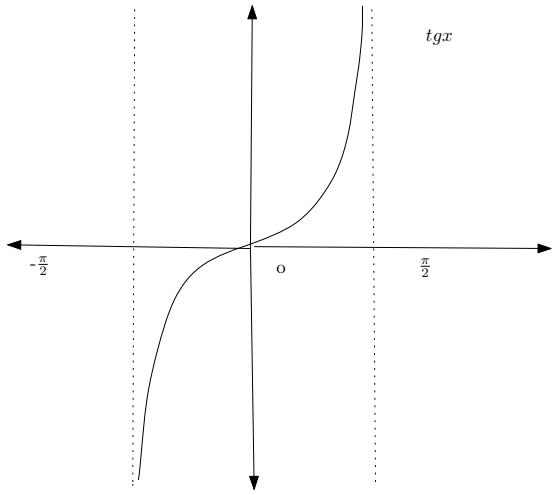
cos(x) : R $\rightarrow [-1, +1]$



Functia cos(x) are perioada $2 \cdot \pi$, este para, este definita pe R, ia valori intre -1 si +1 si este bijectiva pentru x $\in [0, \pi]$.

Deci restrictia bijectiva cos(x) : $[0, \pi] \rightarrow [-1, +1]$ admite o functie inversa, arccos(x) : $[-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$, al carei grafic este simetric in raport cu cos(x) fata de bisectoarea intai, y=x.

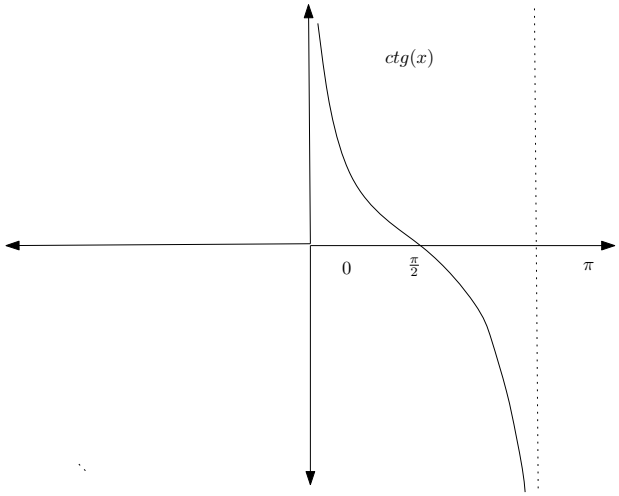
tg(x) : R \ { $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ } → R



Functia tg(x) are perioada π, este impara, este definita pe
R \ { $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ }, ia valori intre -∞ si +∞ si este bijectiva pentru x ∈ $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.

Deci restrictia bijectiva tg(x) : $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$ admite o functie inversa, arctg(x) : $(-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$, al carei grafic este simetric in raport cu tg(x) fata de bisectoarea intai, y=x.

ctg(x) : R \ { $k \cdot \pi$ } → R



Functia ctg(x) are perioada π, este impara, este definita pe
R \ { $k \cdot \pi$ }, ia valori intre -∞ si +∞ si este bijectiva pentru x ∈ $(0, \pi)$.

Deci restrictia bijectiva ctg(x) : $(0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$ admite o functie inversa, arcctg(x) : $(-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$, al carei grafic este simetric in raport cu ctg(x) fata de bisectoarea intai, y=x.

Memo 5 Ecuatii si inecuatii trigonometrice

1. Ecuatii trigonometrice elementare

Se considera cunoscute urmatoarele:

- Se considera cunoscute valorile pentru sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x), unde x=30°, 45°, 60° si pentru 90°, 180°, 270°, precum si modul de transformare din grade in radiani.
- Se considera cunoscut cercul trigonometric
- Se considera cunoscute graficele functiilor sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x)
- Se considera cunoscut faptul ca sin(x), tg(x), ctg(x) sunt impare iar cos(x) este par. De asemenea se cunoaste faptul ca functiile pare sunt simetrice fata de Oy, iar functiile impare sunt simetrice fata de origine
- Se considera cunoscut faptul ca sin(x) si cos(x) au perioada $2 \cdot \pi$ iar tg(x) si ctg(x) au perioada π

Se considera **ecuatie trigonometrica elementara**, o ecuatie care are una din formele urmatoare:

sin(x)=a , unde a ∈ [-1,1]
cos(x)=b , unde b ∈ [-1,1]
tg(x) =c , unde c ∈ R
ctg(x)=d , unde d ∈ R

Capcana consta in faptul ca rezolvarea acestor ecuatii pare foarte simpla, dar de fapt este complicata. De exemplu pentru sin(x)=1/2, prima tentatie este sa se dea rapid raspunsul x= 30°. Raspunsul este corect dar incomplet, in sensul ca mai exista o infinitate de solutii si anume: 30°, 150° (= 180-30) si pentru fiecare dintre ele, $+2\pi k$, unde k ∈ Z si anume pentru k>0 inseamna rotatii in sens trigonometric iar pentru k<0 inseamna rotatii in sens invers trigonometric. Scriind rezultatul in radiani, solutia completa pentru ecuatia sin(x)=1/2 este x∈{ $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$} U { $\frac{5\cdot\pi}{6} + 2k\pi$}

Pentru a se evita efectuarea de fiecare data a rationamentelor anterioare, este eficienta memorarea urmatoarelor formule:

sin(x)=a	x=$(-1)^k\cdot$ arcsin(a) + kπ, pentru a ∈ [0,1]
sin(x)=a	x=$(-1)^{k+1}\cdot$ arcsin$\|a\|$+kπ, pentru a ∈ [-1,0)
cos(x)=b	x=± arccos(b)+2kπ, pentru b ∈ [0,1]
cos(x)=b	x=± arccos$\|b\|$+(2k+1)π, pentru b ∈ [-1,0]
tg(x)=c	x=arctg(c)+kπ
ctg(x)=d	x=arcctg(d)+kπ

Formulele pentru tg(x)=c si ctg(x)=d sunt usor de retinut.
Pentru sin(x)=a si cos(x)=b formulele sunt mai dificil de memorat, eventual se poate retine modul de deducere a acestora, utilizand cercul trigonometric.

2. Ecuatii de genul sin(x)=sin(y)

Pentru urmatoarele tipuri:

sin(x)=sin(y)
cos(x)=cos(y)
sin(x)=cos(y)
tg(x) = tg(y)
ctg(x)=ctg(y)

Pentru a se ajunge la ecuatii trigonometrice elementare, se recomanda transformarea ecuatiei initiale, de exemplu:

Pentru sin(x) = sin(y) trecem totul intr-un membru, sin(x)-sin(y)=0 , transformam in produs si obtinem $2cos\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2} = 0$, adica $cos\frac{x+y}{2} = 0$ sau $sin\frac{x-y}{2} = 0$ şi rezolvăm fiecare ecuatie separat.

Pentru sin(x)=cos(y), se scrie sin(x)=sin($\frac{\pi}{2}$-y) si in continuare se procedeaza similar cu problema anterioara.

3. Inecuatii trigonometrice elementare

Se considera **inecuatie trigonometrica elementara**, o inecuatie care are una din formele urmatoare:

sin(x) > a
cos(x) > b
tg(x) > c
ctg(x) > d

Semnul poate fi > , < , >= ,<= , s.a.m.d.

Pentru a se evita memorarea altor formule, se recomanda rezolvarea acestor inecuatii astfel:

• Pentru $sin(x) > a$ si $cos(x) > b$ se analizeaza **cercul trigonometric** , tinand cont de rotatiile $2 \cdot k \cdot \pi$, unde k $\in$ Z.
• Pentru $tg(x) > c$ si $ctg(x) > d$ se analizeaza **graficul functiei tg(x), respectiv ctg(x)**, tinand cont ca tg(x) si ctg(x) au perioada π

4. Rezolvarea EFECTIVA a ecuatiilor trigonometrice (respectiv a inecuatiilor trigonometrice)

In principiu se parcurg urmatorii pasi:

1. Se transforma ecuatia, respectiv inecuatia data pana se ajunge la o **ecuatie elementara**, respectiv inecuatie elementara. Transformarea se face folosind diverse artificii si formulele uzuale de trigonometrie. Dintre aceste formule, sunt utile indeosebi: formula fundamentala a trigonometriei, exprimarea sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x) in functie de $tg\frac{x}{2}$, exprimarea lui sin(x) si cos(x) in functie de tg(x), formulele unghiurilor pe jumatate, in care avem radicali, in cazul in care in enunt exista functii la patrat si dorim sa scapam de patrate, s.a.m.d. Este recomandabila stapanirea formulelor de trigonometrie.

2. Se rezolva **ecuatia elementara**, respectiv inecuatia elementara, conform metodelor prezentate anterior.

Memo 6 Numere complexe

A. Forma algebrica a numerelor complexe

Totul incepe de la numarul $i = \sqrt{-1}$

• **Calcule** cu **i**:

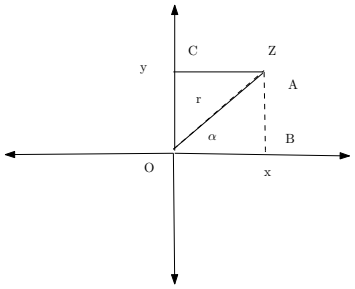
$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = +1$
Se observa ca i^4=1, deci i la orice putere multiplu de 4 este egal cu 1. Aceasta observatie este utila pentru calculul expresiilor care contin i^n.

De exemplu $i^{30} = i^{28} \cdot i^2 = (i^4)^7 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$

• **Termeni noi** Fie un numar complex z=x+yi (forma algebrica).
-**x** se numeste *partea reala* a numarului complex iar **y** se numeste *partea imaginara* a numarului complex.
-**conjugatul lui z** se noteaza cu $\bar{z}$ si se defineste ca fiind $\bar{z}$=x-yi

B. Forma trigonometrica a numerelor complexe

Fie un numar complez z=x+yi (forma algebrica).
Fie reprezentarea grafica urmatoare:



Se poate scrie :
$sin(\alpha) = \frac{y}{r}$ deci y=r·$sin(\alpha)$, respectiv

$cos(\alpha) = \frac{x}{r}$ deci x=r·$cos(\alpha)$

z=x+yi= r·$cos(\alpha)$+r·$sin(\alpha)$·i= $r[cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha)]$

• Forma z=x+yi se numeste *forma algebrica a numarului complex*. **x** se numeste *partea reala* a numarului complex iar **y** se numeste *partea imaginara* a numarului complex.

• Forma z=$r[cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha)]$ se numeste *forma trigonometrica a numarului complex*. **r** se numeste *modulul* numarului complex iar α se numeste *argumentul* numarului complex.

C. Scrierea unui numar complex sub forma trigonometrica

Se da un numar complex z=x+yi . Scrieti numarul sub forma trigonometrica, adica z=r(cosα +i sinα)

1. Se stabileste cadranul, in functie de semnele lui x si y
2. Se calculeaza $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. Se calculeaza $tg\alpha^* = \left|\frac{y}{x}\right|$ rezulta α^*= arctg$\left|\frac{y}{x}\right|$, intotdeauna α^* fiind un unghi din cadranul intai, deoarece $\frac{y}{x}$ se ia in modul.
4. Se calculeaza α pe baza lui α^* si pe baza cadranului stabilit la punctul 1, astfel:

   Pt. cadranul 1, se ia $\alpha = \alpha^*$
   Pt. cadranul 2, se ia $\alpha = \pi - \alpha^*$
   Pt. cadranul 3, se ia $\alpha = \pi + \alpha^*$
   Pt. cadranul 4, se ia $\alpha = 2\pi - \alpha^*$

5. Se scrie numarul complex sub forma trigonometrica, adica z=r(cosα +i sinα)

D. Formule utile pt. numere complexe scrise trigonometric

Fie z_1=r_1(cosα_1 +i sinα_1) , z_2=r_2(cosα_2 +i sinα_2) , z=r(cosα +i sinα) ,

(1) *Inmultire:* $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \cdot sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$

(2) *Impartire:* $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \cdot sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$

Deoarece $z^n = z \cdot z \cdot z .... \cdot z = r \cdot r \cdot ... r[cos(\alpha + \alpha + \cdots + \alpha) + i \cdot sin(\alpha + \alpha \cdots + \alpha)]$

obtinem:

(3) *Putere:* $z^n = r^n[cos(n \cdot \alpha) + i \cdot sin(n \cdot \alpha)]$

(4) *Radical:* $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot (cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \cdot sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n})$

Memo 7: Formule de algebra:

Formule pentru $(a \pm b)^n$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2*a*b + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2*a*b + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3*a^2*b + 3*a*b^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3*a^2*b + 3*a*b^2 - b^3$$

$$(a-b)^4 = (a-b)^3*(a-b) \qquad s.a.m.d.$$

Formule pentru $a^n \pm b^n$

$$a^2 - b^2 = (a-b)*(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)*(a^2 + a*b + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)*(a^2 - a*b + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b)*(a^{n-1} + a^{n-2}*b^1 + a^{n-3}*b^2 + ... + b^{n-1})$$

pentru orice n natural

$$a^n + b^n = (a+b)*(a^{n-1} - a^{n-2}*b^1 + a^{n-3}*b^2 - .... + b^{n-1})$$

pentru n impar

Sume

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n*(n+1)}{2}$ S_1 se mai noteaza cu $\sum_{k=1}^{n} k$

$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6}$ S_2 se mai noteaza cu $\sum_{k=1}^{n} k^2$

$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = S_1^2 = (\frac{n*(n+1)}{2})^2$ S_3 se mai noteaza cu $\sum_{k=1}^{n} k^3$

Exemplu: Calculati suma $S = 1*2 + 2*3 + ... + n*(n+1)$

Rezolvare: S= $\sum_{k=1}^{n} k*(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = S_2 + S_1 = \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6} + \frac{n*(n+1)}{2}$

Puteri si radicali

$$(a * b)^m = a^m * b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(a^m)^n = a^{m*n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

Formula radicalilor compusi:
$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, unde $C = +\sqrt{A^2 - B}$.
Exemplu: Calculati expresia E=$\sqrt{6 - \sqrt{11}}$.
Rezolvare: Calculez C=$\sqrt{6^2 - 11} = \sqrt{25} = 5$, deci E=$\sqrt{\frac{6+5}{2}} - \sqrt{\frac{6-5}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$

Memo 8: Ecuatia de grad 2. Functia de grad 2

Ecuatia de gradul doi

$$a * x^2 + b * x + c = 0, \quad unde \quad a \neq 0$$

• Radacinile $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2*a}$ unde $\Delta = b^2 - 4 * a * c$

• Pentru $\Delta > 0$ exista doua radacini reale, x_1 *si* x_2 , cu $x_1 \neq x_2$

• Pentru $\Delta = 0$ exista doua radacini reale, egale si confundate, $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2*a}$

• Pentru $\Delta < 0$ nu exista radacini reale, sau altfel spus, exista doua radacini complexe x_1 *si* x_2

• Relatiile lui Viète: $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ $P = x_1 * x_2 = \frac{c}{a}$

• Aflarea ecuatiei daca se cunoaste suma si produsul radacinilor (de exemplu stim ca S=10 si P=20).

Ecuatia este: $x^2 - S * x + P = 0$

Pentru exemplul anterior obtinem ecuatia : $x^2 - 10 * x + 20 = 0$

Functia de gradul doi

$$y = a * x^2 + b * x + c, \quad unde \quad a \neq 0$$

• Graficul functiei de gradul doi este o parabola

• Semnul functiei de gradul doi :

Regula : *Intre radacini semn contrar lui a, in afara radacinilor semnul lui a, în radacini egala cu zero.*

Aplicarea regulii depinde de Δ astfel :

- Pentru $\Delta > 0$ este exact dupa regula.
- Pentru $\Delta = 0$, NU exista zona intre radacini, deci functia va fi egala cu zero in radacini, in rest va avea semnul lui a.
- Pentru $\Delta < 0$, NU exista nici radacini, nici zona dintre radacini, deci functia va avea totdeauna semnul lui a.

• **Reprezentarea grafica a functiei de gradul doi.** Se urmeaza pasii:

1) Daca a > 0, functia are minim iar daca a < 0 are maxim.

2)Pentru minim si maxim se mai foloseste termenul de "Varf" sau de "extrem". Acesta este un punct sa zicem $V(x_v, y_v)$. El reprezinta cel mai de jos punct al graficului in cazul minimului, respectiv cel mai de sus punct in cazul maximului. Se calculeaza coordonatele varfului $V(x_v, y_v)$ cu formula $x_v = \frac{-b}{2*a}$ si $y_v = \frac{-\Delta}{4*a}$, deci practic se calculeaza varful $V(\frac{-b}{2*a}, \frac{-\Delta}{4*a})$.

3) Se afla intersectia cu axa Ox , facand y=0 in expresia $y = a * x^2 + b * x + c$, adica practic se rezolva ecuatia $a * x^2 + b * x + c = 0$. Valorile obtinute pentru x reprezinta intersectiile cu Ox. De exemplu daca obtinem doua valori x_1 si x_2, punctele de intersectie cu Ox vor fi $(x_1, 0)$ si $(x_2, 0)$.

4) Se afla intersectia cu axa Oy , facand x=0 in expresia $y = a * x^2 + b * x + c$, adica se obtine $y = a * 0^2 + b * 0 + c$, adica intotdeauna se obtine de fapt y=c. Punctul (0,c) reprezinta intersectia graficului cu Oy.

5) Se traseaza graficul folosind datele anterioare, in ordinea urmatoare: Se deseneaza axele XOY, se deseneaza varful V, se deseneaza forma varfului(minim sau maxim), se deseneaza intersectiile cu Ox si intersectia cu Oy si se unesc punctele obtinute. Se tine seama ca graficul este simetric fata de axa de simetrie care trece prin varf.

- **Monotonie:**

- Functia este descrescatoare de la $-\infty$ pana la x_{varf} si crescatoare in continuare, de la x_{varf} pana la $+\infty$ (daca Varful este minim, adica pentru $a > 0$) .Respectiv,

- Functia este crescatoare de la $-\infty$ pana la x_{varf} si descrescatoare in continuare, de la x_{varf} pana la $+\infty$ (daca Varful este maxim, adica pentru $a < 0$) .

Memo 9 Semnul functiei de gradul doi

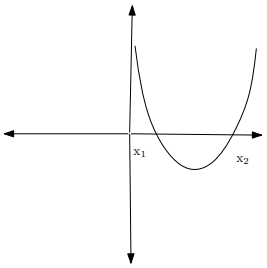
y=ax^2+bx+c, $a \neq 0$

Graficul functiei de gradul doi este o parabola. Daca a>0, graficul functiei are minim, iar daca a<0, graficul functiei are maxim. Minimul, respectiv maximul se numeste varf, respectiv punct de extrem. Varful are coordonatele V($\frac{-b}{2a}$, $\frac{-\Delta}{4a}$)

Exista trei situatii diferite, dupa cum $\Delta > 0$ sau $\Delta = 0$ sau $\Delta < 0$

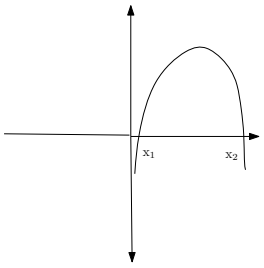
1. Pentru $\Delta > 0$, exista doua radacini reale, diferite, $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in R$.

Graficul poate fi de genul urmator:



$\Delta > 0$ *si* $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$y=ax^2+bx+c$	+	+	0	-	0	+	+



$\Delta > 0$ *si* $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$y=ax^2+bx+x$	+	+	0	-	0	+	+

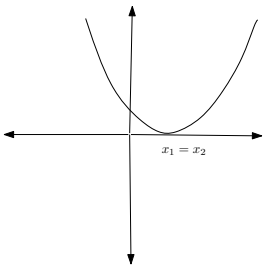
Din analiza graficelor se pot desprinde urmatoarele observatii:

• Intre radacini functia de gradul doi are semn contrar lui a, iar in afara radacinilor are semnul lui a. In radacini, functia este egala cu zero.

• Pentru $\Delta > 0$, functia nu are semn constant, fiind pozitiva pe anumite intervale si negativa pe altele.

2. Pentru $\Delta = 0$, exista doua radacini reale, egale, $x_1 = x_2$, $x_1, x_2 \in R$.

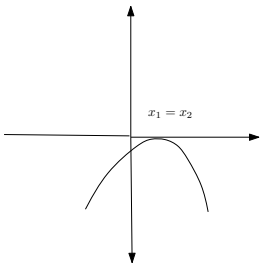
Graficul poate fi de genul urmator:



$\Delta = 0$ *si* $a > 0$

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
$y=ax^2+bx+c$	+	+	0	+	+

$y >= 0$



$\Delta = 0$ *si* $a < 0$

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
$y=ax^2+bx+x$	-	-	0	-	-

$y <= 0$

Din analiza graficelor se pot desprinde urmatoarele observatii:

• Intervalul dintre radacini *a disparut, radacinile fiind egale, respectiv confundate*, prin urmare functia de gradul doi are valoarea zero in radacini si in rest semnul lui a.

• Pentru $\Delta = 0$, functia **nu schimba semnul** fiind pozitiva sau egala cu zero pentru $a > 0$, respectiv negativa sau egala cu zero pentru $a < 0$.

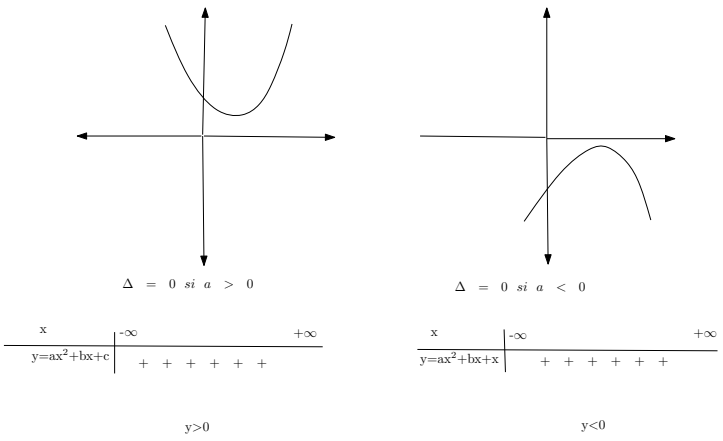
• Daca intr-o problema este necesar sa se puna conditia pentru $y >= 0$, se pun conditiile $\Delta <= 0$ si $a > 0$.

• Daca intr-o problema este necesar sa se puna conditia pentru $y <= 0$, se pun conditiile $\Delta <= 0$ si $a < 0$.

---

3. Pentru $\Delta < 0$, nu exista radacini reale

Graficul poate fi de genul urmator:



Din analiza graficelor se pot desprinde urmatoarele observatii:

• Functia de gradul doi are semnul lui a.

• Pentru $\Delta < 0$, functia **nu schimba semnul** fiind pozitiva pentru $a > 0$, respectiv negativa pentru $a < 0$.

• Daca intr-o problema este necesar sa se puna conditia pentru $y > 0$(strict), se pun conditiile $\Delta < 0$ si $a > 0$.

• Daca intr-o problema este necesar sa se puna conditia pentru $y < 0$(strict), se pun conditiile $\Delta < 0$ si $a < 0$.

Memo 10 Functii injective, surjective, bijective

Injectivitate

Definitie Fie o functie f: A $\rightarrow$ B. Functia f este injectiva, daca pentru $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, pentru orice $x_1, x_2 \in A$

Demonstrarea injectivitatii se poate face prin mai multe metode, alegerea metodei depinzand de tipul de functie analizata. De exemplu:

1. Daca f(x) se poate **reprezenta grafic**, pentru ca f(x) sa fie injectiva, trebuie ca **orice paralela la Ox, dusa prin B, sa taie graficul functiei intr-un punct sau niciunul.** Cu alte cuvinte, orice paralela la Ox prin codomeniu, trebuie sa intersecteze graficul functiei in cel mult un punct.

2. Daca f(x) se poate **reprezenta ca o diagrama**, de obicei pentru probleme la care domeniul de definitie A este o multimi finita, functia nu este injectiva daca exista valori in codomeniu, carora le corespund mai mult de un element din domeniul de definitie.

3. Daca f(x) nu se poate nici reprezenta grafic, nici ca diagrama, se poate incerca **prin calcul algebric**, adica se considera $x_1 \neq x_2$ si se incearca sa se arate ca $f(x_1) \neq f(x_2)$. Practic se porneste de la diferenta $f(x_1) - f(x_2)$ si prin diverse calcule se incearca se sa arate ca aceasta diferenta este diferita de zero. Eventula se poate porni de la raportul $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}$ si se incearca sa se demonstreze ca acest raport este diferit de 1.

4. Injectivitatea se poate verifica si utilizand materie de **analiza matematica**, studiata in clasa a XI-a . Practic, pentru functia f(x) se calculeaza derivata f'(x) si daca se arata ca f'(x) este tot timpul pozitiva pe domeniul de definitie, inseamna ca functia f(x) este crescatoare. Daca functie este crescatoare, inseamna automat ca functia este injectiva, deoarece $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Similar, daca in schimb se obtine f'(x) tot timpul negativa pe domeniul de definitie, inseamna ca functia f(x) este descrescatoare. Daca functie este descrescatoare, inseamna automat ca functia este injectiva, deoarece $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Se observa ca s-a folosit proprietatea ca o functie monotona (indiferent daca este crescatoare sau descrescatoare) este injectiva. Studiul monotoniei functiei s-a realizat prin studiul semnului derivatei functiei. Faptul ca daca f'>0 inseamna ca f=crescatoare, respectiv daca f'<0 inseamna ca f=descrescatoare, reprezinta consecinte ale teoremei lui Lagrange.

Surjectivitate

Definitie Fie o functie f: A $\rightarrow$ B. Functia f este surjectiva, daca pentru y $\in$ B, exista x $\in$ A, astfel incat y=f(x).

Demonstrarea surjectivitatii se poate face prin mai multe metode, alegerea metodei depinzand de tipul de functie analizata. De exemplu:

1. Daca f(x) se poate **reprezenta grafic**, pentru ca f(x) sa fie surjectiva, trebuie ca **orice paralela la Ox, dusa prin B, sa taie graficul functiei intr-un punct sau mai multe.** Cu alte cuvinte, orice paralela la Ox prin codomeniu, trebuie sa intersecteze graficul functiei in cel putin un punct.

2. Daca f(x) se poate **reprezenta ca o diagrama**, de obicei pentru probleme la care domeniul de definitie A este o multimi finita, functia nu este surjectiva daca exista valori in codomeniu, carora **nu le corespunde niciun element din domeniul de definitie.**

3. Daca f(x) nu se poate nici reprezenta grafic, nici ca diagrama, se poate incerca **prin calcul algebric**, adica **se noteaza f(x) cu y se apoi scoate x in functie de y.** Din aceasta expresie a lui x in functie de y, **se analizeaza daca pentru orice y din codomeniu, exista x corespunzator din domeniul de definitie.**

De exemplu pentru f:R $\rightarrow$ R, f(x)=x^2+1, se face y=x^2+1 si se scoate x=$\pm\sqrt{y-1}$. Pentru a exista radicalul trebuie ca y-1 >=0, adica y>=1, adica y $\in$ [1,∞). Codomeniul fiind R, inseamna ca pentru y $\in$ (-∞,1) nu exista x $\in$ R corespunzator, astfel incat y=f(x), deci functia nu este surjectiva.

4. Surjectivitatea se poate verifica si utilizand materie de **analiza matematica**, studiata in clasa a XI-a . Se utilizeaza notiunea de continuitate a unei functii si proprietatea lui Darboux. De exemplu pentru f(x)=2^x+3^x, deoarece functia este continua, inseamna ca are proprietatea lui Darboux, prin urmare este surjectiva. Se reaminteste **proprietatea lui Darboux:**

O functie are proprietatea lui Darboux, daca transforma un interval in alt interval. Adica, pentru f: I $\rightarrow$ J, spunem ca f are proprietatea lui Darboux, daca pentru domeniul de definitie I, fiind interval, se obtine prin functia f, codomeniul J tot ca interval. Functiile continue au proprietatea lui Darboux. Prin urmare daca I=interval, stabilirea surjectivitatii se reduce la studiul continuitatii functiei si la invocarea implicatiei continuitatii asupra proprietatii lui Darboux.

Bijectivitate

Definitie Fie o functie f: A $\rightarrow$ B. Functia f este bijectiva, daca este atat injectiva cat si surjectiva.

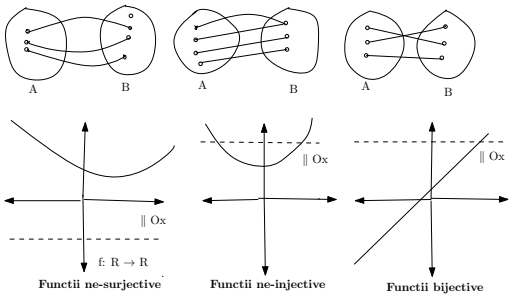
Studiul bijectivitatii se reduce la verificarea, pe rand, a injectivitatii si a surjectivitatii conform metodelor prezentate anterior. Daca functia este atat injectiva cat si surjectiva, se trage concluzia ca functia este bijectiva, in caz contrar se trage concluzia ca functia nu este bijectiva.

Se pot face urmatoarele observatii:

1. In cazul in care se foloseste **reprezentarea grafica,** pentru ca o functie sa fie bijectiva, adica atat injectiva cat si surjectiva, trebuie ca **orice paralela la Ox, dusa prin B, sa taie graficul functiei exact intr-un punct**.

2. In cazul in care se foloseste **reprezentarea ca diagrama,** pentru ca o functie sa fie bijectiva, adica atat injectiva cat si surjectiva, trebuie ca in diagrama sa fie corespondenta de 1 la 1, adica la orice element x $\in$ A sa corespunda exact un element y $\in$ B si reciproc. Altfel spus, sa fie o **corespondenta 1 la 1**, care se mai numeste si **corespondenta biunivoca**.

Exemple



Memo 11: Progresii aritmetice. Progresii geometrice

Progresii aritmetice

• Definitie: Progresie aritmetica = un sir $a_1, a_2, ..., a_n$ cu proprietatea ca fiecare termen este egal cu termenul de dinainte plus ratia(notata r). Cu alte cuvinte, $a_2 - a_1 = r$, $a_3 - a_2 = r$, s.a.m.d. Mai precis spus, $a_n - a_{n-1} = r$ pentru $n >= 2$. Adica o P.A. este un sir $a_1, a_2, ..., a_n$ cu proprietatea ca

$$\mathbf{a_n = a_{n-1} + r}$$

Aceasta este formula 1. Ratia poate fi sau pozitiva, sau negativa.
Trebuie ca n sa fie >= 2, deoarece a_1 nu are termen anterior.

• Formula 2 = Exprimare a_n in functie de primul termen (a_1) si ratie(r).
Deoarece $a_1 = a_1$
Deoarece $a_2 = a_1 + r$
Deoarece $a_3 = a_2 + r = a_1 + 2 * r$
Deoarece $a_4 = a_3 + r = a_1 + 3 * r$, s.a.m.d., se obtine formula:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) * r}$$

• Formula 3 = Verificare daca trei numere sunt in progresie aritmetica
Pentru a verifica daca numerele A, B, C sunt in P.A., se verifica daca este indeplinita conditia:

$$\mathbf{B = \frac{A + C}{2}}$$

adica daca cel din mijloc e media aritmetica a vecinilor.
E firesc sa fie asa, deoarece A= B - r, C= B+r , deci $A + C = 2 * B$

• Formula 4 = Suma unei progresii aritmetice
Pentru progresia aritmetica $a_1, a_2, ..., a_n$, suma

$$\mathbf{S = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{(a_1 + a_n) * n}{2}}$$

Se retine usor dupa formularea $\mathbf{S = \frac{(PrimulTermen + UltimulTermen) * n}{2}}$

Demonstratia este simpla si anume:
$S=a_1+a_2+...+a_n = a_1+(a_1+r)+(a_1+2*r)+(a_1+3*r)+....(a_1+(n-1)*r)$
$= (a_1*n+r+2*r+3*r+...(n-1)*r) = n*a_1+r*(1+2+...+(n-1)) =$
$= n * a_1 + r * \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = n * a_1 + \frac{r*n*(n-1)}{2} = \frac{2*a_1+(n-1)*r}{2} * n = \frac{a_1+a_1+(n-1)*r}{2} * n$
Deci $S=\frac{(a_1+a_n)*n}{2}$

• Formula 5 = Suma unei progresii aritmetice, alta formula
Daca se exprima $a_n = a_1 + (n - 1) * r$ in formula anterioara, se obtine inca o formula pentru S si anume:

$$\mathbf{S = \frac{(2 * a_1 + (n - 1) * r) * n}{2}}$$

Recomandare : Daca in problema se cunoaste primul termen si ultimul, e utila formula 4, iar daca se cunoaste primul termen si ratia, e utila formula 5. In ambele situatii trebuie sa cunoastem numarul de termeni ai progresiei, notat cu n.

Progresii geometrice

• Definitie: Progresie geometrica = un sir $b_1, b_2, ..., b_n$ cu proprietatea ca fiecare termen este egal cu termenul de dinainte inmultit cu ratia(notata q). Cu alte cuvinte, $b_2 = b_1 * q$, $b_3 = b_2 * q$, s.a.m.d. Mai precis spus, $b_n = b_{n-1} * q$ pentru $n >= 2$. Adica o P.G. este un sir $b_1, b_2, ..., b_n$ cu proprietatea ca

$$\mathbf{b_n = b_{n-1} * q}$$

Aceasta este formula 1. Ratia poate fi sau pozitiva, sau negativa.
Trebuie ca n sa fie >= 2, deoarece b_1 nu are termen anterior.

• Formula 2 = Exprimare b_n in functie de primul termen (b_1) si ratie(q).
Deoarece $b_1 = b_1$
Deoarece $b_2 = b_1 * q$
Deoarece $b_3 = b_2 * q = b_1 * q^2$
Deoarece $b_4 = b_3 * q = b_1 * q^3$, s.a.m.d., se obtine formula:

$$\mathbf{b_n = b_1 * q^{n-1}}$$

• Formula 3 = Verificare daca trei numere sunt in progresie geometrica
Pentru a verifica daca numerele A, B, C sunt in progresie geometrica, se verifica daca este indeplinita conditia $B^2 = A * C$(general valabila), respectiv :

$$\mathbf{B = \sqrt{A * C}}$$

pentru $A, B, C > 0$, adica daca termenul din mijloc e media geometrica a vecinilor.

E firesc sa fie asa, deoarece $A = \frac{B}{q}$, $C = B * q$, deci $A * C = B^2$, adica $B = \sqrt{A * C}$

• Formula 4 = Suma unei progresii geometrice
Pentru progresia geometrica $b_1, b_2, ..., b_n$, suma

$$\mathbf{S = b_1 + b_2 + ... + b_n = b_1 * (\frac{q^n - 1}{q - 1})}$$

Demonstratia este simpla si anume:
S=$b_1 + b_2 + ... + b_n = b_1 + (b_1 * q) + (b_1 * q^2) + (b_1 * q^3) + ...(b_1 * q^{n-1})$
$= b_1(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1}) = b_1 * (\frac{q^n - 1}{q-1})$ c.c.t.d

Am folosit formula $x^n - 1^n = (x - 1) * (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1)$ unde pe rol de x am folosit q si am scos pe $(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}) = \frac{x^n - 1}{x-1}$

Memo 12 Functia exponentiala

y=a^x, a >0 , a$\neq$ 1

Exista doua situatii diferite, dupa cum a>1 sau a$\in$(0,1)

Argumentarea faptului ca a >0 , a$\neq$ 1

Valoarea lui **a nu poate avea** urmatoarele valori:

-Nu trebuie ca a sa fie egal cu 0, deoarece 0 la orice putere este egal cu 0.

-Nu trebuie ca a sa fie egal cu 1, deoarece 1 la orice putere este egal cu 1.

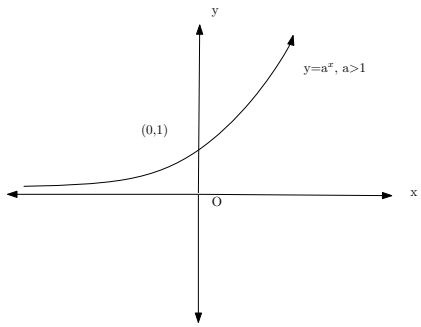
-Nu trebuie ca a sa fie negativ. De exemplu daca avem a=-3 si x=$\frac{1}{2}$, am obtine a^x = (-3)$^{\frac{1}{2}}$, adica a^x = $\sqrt{-3}$, adica radical din numar negativ, care nu apartine lui R.

Din valorile a $\in$ R, daca eliminam a=0, a=1 si a<0, obtinem doua intervale permise si anume a $\in$ (0,1) si a $\in$ (1,∞) , sau altfel spus, a>0 si a $\neq$1

Caz 1. a>1 Fie de exemplu y=2^x. Trasam graficul functiei prin puncte, dand valori lui x:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	....
y		1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	

Se obtine graficul urmator:



Din analiza graficului se pot desprinde urmatoarele observatii:

• Functia y=a^x, a> 1 este definita pe R si ia valori in (0,∞), adica f: R $\rightarrow$ (0,∞), prin urmare domeniul de definitie este R, iar codomeniul este (0,∞). Se observa ca orice paralela la axa Ox, dusa prin codomeniu intersecteaza graficul functiei in exact un punct, prin urmare functia este bijectiva. Fiind bijectiva, inseamna ca este atat surjectiva cat si injectiva. Datorita faptului ca este injectiva, adica daca f(x_1)=f(x_2) inseamna ca x_1=x_2, in cazul in care obtinem o ecuatie de forma a$^{f(x)}$=a$^{g(x)}$, putem trage concluzia ca f(x)=g(x).

• a^x > 0 pentru orice x $\in$ R. Deci daca se obtine o ecuatie de exemplu 5^x=-25 inseamna ca ecuatia nu are solutii, deoarece 5^x este intotdeauna pozitiv.

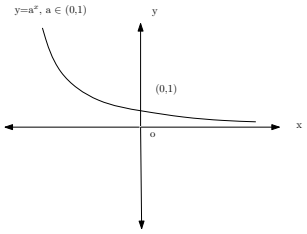
• Functia a^x , pentru a> 1 este **crescatoare**, adica daca $x_1 < x_2$ inseamna ca $f(x_1) < f(x_2)$ si reciproc. Daca obtinem o inecuatie de exemplu 2^x <8, putem trage concluzia ca x< 3.

• Deoarece a^0=1, graficul functiei y=a^x trece prin punctul (0,1) pentru orice a> 1

Caz 2. **a∈(0,1)** Fie de exemplu y=$(\frac{1}{2})^x$. Trasam graficul functiei prin puncte, dand valori lui x:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3 ....
y		8	4	2	1	1/2	1/4	1/8

Se obtine graficul urmator:



Din analiza graficului se pot desprinde urmatoarele observatii:

• Functia y=a^x, a∈ (0,1) este definita pe R si ia valori in (0,∞), adica f: R → (0,∞), prin urmare domeniul de definitie este R, iar codomeniul este (0,∞). Se observa ca orice paralela la axa Ox, dusa prin codomeniu intersecteaza graficul functiei in exact un punct, prin urmare functia este bijectiva. Fiind bijectiva, inseamna ca este atat surjectiva cat si injectiva. Datorita faptului ca este injectiva, adica daca f(x_1)=f(x_2) inseamna ca x_1=x_2, in cazul in care obtinem o ecuatie de forma $a^{f(x)}$=$a^{g(x)}$, putem trage concluzia ca f(x)=g(x).

• $a^x > 0$ pentru orice x ∈ R. Deci daca se obtine o ecuatie de exemplu $(\frac{1}{5})^x$=-$(\frac{1}{25})$ inseamna ca ecuatia nu are solutii, deoarece $(\frac{1}{5})^x$ este intotdeauna pozitiv.

• Functia a^x , pentru a∈ (0,1) este **descrescatoare** , adica daca $x_1 < x_2$ inseamna ca $f(x_1) > f(x_2)$ si reciproc. Daca obtinem o inecuatie de exemplu $(\frac{1}{2})^x < \frac{1}{8}$, putem trage concluzia ca x> 3.

• Deoarece a^0=1, graficul functiei y=a^x trece prin punctul (0,1) pentru orice a∈ (0,1).

• **Practic la rezolvarea ecuatiilor exponentiale** se incearca sa se ajunga prin diverse artificii la o ecuatie de forma $a^{f(x)}$=$a^{g(x)}$, de unde se trage concluzia ca f(x)=g(x).

• **Practic la rezolvarea inecuatiilor exponentiale** se incearca sa se ajunga prin diverse artificii la o inecuatie de forma $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, care se interpreteaza dupa valoarea lui a si anume daca a> 1 se pastreaza semnul inegalitatii intre f(x) si g(x), respectiv daca a∈ (0,1), se inverseaza semnul inegalitatii intre f(x) si g(x).

• Sunt utile de reamintit formulele de la puteri
$(a^m)^n = a^{m*n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, a^0=1, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

• **Functia exponentiala** y=a^x : R → (0,∞) fiind bijectiva, admite o functie inversa si anume **functia logaritmica** y=$\log_a^x$: (0,∞) → R, al carei grafic este simetric fata de y=a^x in raport cu bisectoarea intai, y=x. Bineinteles ca se genereaza doua situatii pentru $\log_a^x$ si anume pentru a>1 si pentru a∈(0,1).

Memo 13 Logaritmi

Formule:

1) Definitie: log_a^X este un numar N, cu proprietatea ca,

$$\text{daca } \ log_a^X = N, \text{ atunci } X = a^N$$

De exemplu $log_{10}^{100} = 2$ deoarece $100 = 10^2$

2) $log_a^A + log_a^B = log_a^{A*B}$

3) $log_a^A - log_a^B = log_a^{\frac{A}{B}}$

4) $log_a^{A^m} = m * log_a^A$

5) $log_a^a = 1$

6) $log_{a=veche}^X = \frac{log_{b=noua}^X}{log_{b=noua}^{a=veche}}$

7) $log_{a^m}^X = \frac{1}{m} * log_a^X$

8) $log_a \sqrt[m]{X^n} = log_a^{X^{\frac{n}{m}}} = \frac{n}{m} * log_a^X$

Domeniul de definitie:

Pentru $log_a A$ este necesar ca

- A >0 $\rightarrow$ obtinem de exemplu x apartine interval I_1
- a >0 si a $\neq$1 $\rightarrow$ obtinem de exemplu x apartine interval I_2

Domeniul de definitie este I_1 intersectat cu I_2

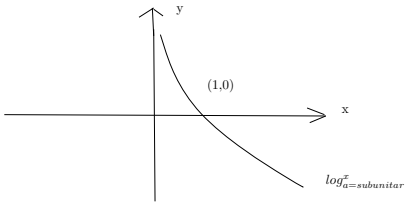
Baza logaritmului:

- lg^X inseamna log_{10}^X adica *logaritm zecimal*
- ln^X inseamna log_e^X adica *logaritm natural*, unde $e \approx 2.718$

Baza subunitara sau baza supraunitara.
Datorita conditiei de la *domeniul de definitie* , pentru log_a^X, deoarece trebuie ca $a > 0$ si $a \neq 1$, practic exista doua situatii pentru baza logaritmului:

-CAZ 1: a intre (0,1). In acest caz, functia logaritm este , descrescatoare, de exemplu daca stim ca a este intre (0,1) si obtinem intr-o problema $log_a^A < log_a^B$, putem trage concluzia ca $A > B$.

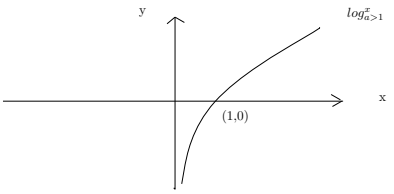
Graficul functiei logaritm, pentru baza **subunitara** este urmatorul:



Se observa din grafic urmatoarele:

- $log_a^X : (0, \infty) \to R$
- functia este descrescatoare
- $log_a^1 = 0$
- functia este pozitiva pentru X intre (0,1)
- functia este nula pentru X=1
- functia este negativa pentru X>1.

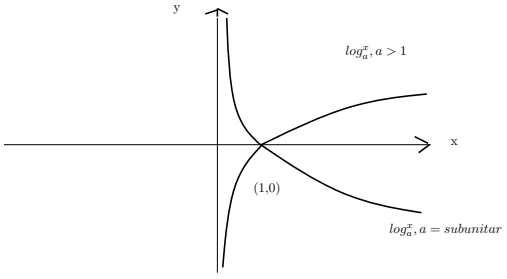
- **CAZ 2: a intre (1,∞)** In acest caz, functia logaritm este , crescatoare, de exemplu daca stim ca a este intre (1,∞) si obtinem intr-o problema $log_a^A < log_a^B$, putem trage concluzia ca $A < B$. Graficul functiei logaritm, pentru baza **supraunitara** este urmatorul:



Se observa din grafic urmatoarele:

- $log_a^X : (0, \infty) \to R$
- functia este crescatoare
- $log_a^1 = 0$
- functia este negativa pentru X intre (0,1)
- functia este nula pentru X=1
- functia este pozitiva pentru X>1.

Ambele cazuri se pot sintetiza intr-un singur grafic:



Memo 14 Analiza combinatorie

Factorialul, Permutari, Aranjamente, Combinari

Factorialul

• Prin definitie **n factorial** se noteaza cu **n!** si are urmatoarea formula de calcul:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot (n-1) \cdot n$$

• Exemple:

a) 3!=$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

b) 1!=1

c) 0!=1 (=surprinzator la prima vedere, se va explica ulterior)

• Rezulta urmatoarele formule:

n!=$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot (n-1) \cdot n$, deci se poate scrie si astfel:

n!=(n-1)!$\cdot n$

n!=(n-2)!$\cdot (n-1) \cdot n$

n!=(n-3)!$\cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$, s.a.m.d.

Permutari

• **Permutari de n elemente** se noteaza cu P_n si are urmatoarea formula de calcul:

$$P_n = n!$$

deci $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot (n-1) \cdot n$

• Exemplu:

a) $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

• Ce inseamna "Permutari de n elemente"

Daca avem de exemplu un numar de n=3 elemente $\{a, b, c\}$, P_3 ne arata **in cate moduri** pot "permuta(= schimba intre ele cele 3 elemente)", astfel incat sa formeze "echipe" care :

a) sa contina toate cele n elemente(atat a cat si b cat si c)

b) nici un element sa nu se repete.

Practic pot forma urmatoarele "echipe" :

{abc} {acb} {bac} {bca} {cab} {cba}

Daca numaram "echipele anterioare" se vede ca sunt 6 . Intradevar 6= $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$. In concluzie cu P_n pot afla **numarul de "echipe"** care se pot genera, deci ne da **cate echipe sunt, nu care sunt aceste echipe**.

Aranjamente

• **Aranjamente de n elemente luate cate k** se noteaza cu A_n^k si are urmatoarea formula de calcul:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot (n-k+1)$$

• Exemplu:
$A_{10}^4 = 10 \cdot 9...(10-4+1) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

• Ce inseamna A_n^k:

Exemplul 1: De exemplu daca avem 30 de elevi si vrem sa ii grupam cate 2 in banca(ordinea conteaza, de exemplu daca se face o poza a clasei), numarul acestor grupari este dat de A_{30}^2, si anume dupa formula anterioara se poate calcula $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$ adica se pot "aranja" in 870 de moduri.

Exemplul 2: Daca avem n=3 elemente de exemplu multimea $\{a, b, c\}$ si vrem sa "aranjam" aceste elemente in grupa de cate 2, obtinem:

{ab} {ac} {bc} {ba} {cb} {ca} Observam ca sunt 6 grupari, adica $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Se observa ca apare atat gruparea $\{ab\}$ cat si gruparea $\{ba\}$ adica **conteaza ordinea elementelor.**

Practic A_n^k seamana cu P_n cu diferenta ca in "echipa" nu intra toate cele n elemente ci doar k (unde k $\leq$ n).

• Domeniul de definitie:

Pentru A_n^k trebuie ca n, k $\in$ N si n $\geq$ k

Se poate imagina absurditatea situatiilor pentru n $<$ k sau pentru n, k nenaturale(de exemplu negative, fractionare, s.a.m.d)

Combinari

• **Combinari de n elemente luate cate k** se noteaza cu C_n^k si are urmatoarea formula de calcul:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$$

• **Practic** Se foloseste formula $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

• Exemplu:
$C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$

• Ce inseamna C_n^k:

Exemplul: Daca avem n=3 elemente de exemplu multimea $\{a, b, c\}$ si vrem sa "combinam" aceste elemente in grupa de cate 2, obtinem:

{ab} {ac} {bc} Observam ca sunt 3 grupari, adica $C_3^2 = 3$. Se observa ca apare apare gruparea $\{ab\}$ **dar nu si gruparea** $\{ba\}$ adica **nu conteaza ordinea elementelor.**

Practic C_n^k seamana cu A_n^k cu diferenta ca in "echipa" nu conteaza ordinea elementelor, adica {a,b } se considera identic cu {b,a }, deci "se numara" o singura data . Se observa si din formula de definitie ca $C_n^k \leq A_n^k$

• Domeniul de definitie:

Pentru C_n^k trebuie ca n, k $\in$ N si n $\geq$ k , ca si in cazul aranjamentelor.

Memo 15 Binomul lui Newton

1. Formula binomului lui Newton

Se observa ca urmatoarele formule au structura asemanatoare:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, s.a.m.d.

In general pentru $(a+b)^n$ se observa urmatoarele:

Exista n+1 termeni, primul termen fiind a^n, iar ultimul b^n. Mai exact primul este $a^n b^0$ iar ultimul $a^0 \cdot b^n$, in general avem termeni de genul $a^{n-k}b^k$, unde k ia valori de la 0 la n. Acesti termeni sunt fiecare inmultiti cu cate un coeficient. Acesti coeficienti au formula C_n^k.

Gruparea $(a+b)^n$ fiind formata din doi termeni, se numeste binom. Dupa numele persoanei care a descoperit formula urmatoare, aceasta se numeste **binomul lui Newton**:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^{n-0} \cdot b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots C_n^n \cdot a^{n-n} \cdot b^n$$

Se pot face urmatoarele observatii:

- Exista n+1 termeni, deoarece k ia valori intre 0 si n.

- Primul termen este de fapt egal cu a^n, deoarece C_n^0=1 si b^0=1.

- Ultimul termen este de fapt egal cu b^n, deoarece C_n^n=1 si a^0=1.

- Coeficientii C_n^0 , C_n^1 , $\cdots$ C_n^n se numesc **coeficienti binomiali**.

- **Coeficientii binomiali egal departati sunt egali**, deoarece se poate demonstra usor ca $C_n^k = C_n^{n-k}$.

- Binomul lui Newton se poate scrie concentrat sub forma urmatoare:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

deci ca o suma avand termenul general

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Se observa ca primul termen T_1 are k=0, termenul al doilea T_2 are k=1, s.a.m.d. deci intradevar este justificata notatia de T_{k+1} pentru o valoare k.

- Daca binomul este o diferenta in loc de suma:

$$(a-b)^n = (a+[-b])^n = C_n^0 \cdot a^{n-0} \cdot (-b)^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot (-b)^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot (-b)^2 + \cdots C_n^n \cdot a^{n-n} \cdot (-b)^n$$

adica are loc o alternanta de semne incepand cu + apoi - s.a.m.d.

$$(a-b)^n = (a+[-b])^n = C_n^0 \cdot a^{n-0} \cdot b^0 - C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + C_n^n \cdot a^{n-n} \cdot (-b)^n$$

- Acum se poate scrie formula binomului lui Newton la modul cel mai general general:

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

deci ca o suma avand termenul general

$$T_{k+1} = (-1)^k \cdot C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

respectiv

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

---

2. Formule utile

• Majoritatea problemelor cu binomul lui Newton se rezolva **pornind de la formula**

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

pentru $(a+b)^n$

• Se dezvolta cu binomul lui Newton urmatoarele doua binoame:

$(1+1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \cdots C_n^n \qquad (1)$

$(1-1)^n = 0 \ = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 \cdots (-1)^n \cdot C_n^n \qquad (2)$

Adunand relatia (1) cu relatia (2) se obtine: $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdot \cdot = 2^{n-1}$

Scazand relatiile (1) - (2) se obtine: $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdot \cdot = 2^{n-1}$

In concluzie **suma coeficientilor binomiali pari, este egala cu suma coeficientilor binomiali impari si este egala cu** 2^{n-1} :

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdot \cdot = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdot \cdot = 2^{n-1}$$

• Pentru problemele la care se cere determinarea celui mai mare termen al dezvoltarii, se porneste de la raportul $\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}}$ care se compara cu 1. Adica se porneste de la $\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}} > 1$ si din aceasta relatie se scoate k. Apoi se interpreteaza k si se afla termenul maxim. Pentru un binom $(a+b)^n$, raportul

$$\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}} = \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{a}{b}$$

Formula fiind dificil de retinut, se recomanda sa se demonstreze ad-hoc, pornind de la raportul $\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}}$ si exprimand termenii T_{k+1} si T_{k+2} cu formula obisnuita $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ pentru $(a+b)^n$

Exemple: Gasiti rangul celui mai mare termen al dezvoltarii:

$$a)\ (1+0.1)^{100} \qquad b)\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^{100} \qquad c)\ (\frac{3}{4}+\frac{1}{4})^{100}$$

Memo 16 Polinoame

1. Impartirea polinoamelor

• **Metoda 1** Metoda clasica de impartire a doua polinoame f(x) si g(x), dupa metoda studiata in clasa a VIII a. Are avantajul ca impartitorul g(x) poate fi de orice grad. Se recomanda efectuarea probei conform formulei:

$$\textbf{Deimpartitul} = \textbf{Impartitorul} \times \textbf{Catul} + \textbf{Restul}$$

• **Metoda 2** Folosind schema lui Horner pentru impartirea a doua polinoame f(x) si g(x), unde g(x) este de forma (x-a). Are dezavantajul ca g(x) trebuie sa fie de gradul I. Daca g(x) este de grad mai mare, se descompune g(x) in factori de gradul I, de exemplu x^2-25 =(x-5)(x-(-5)) si se imparte succesiv f la (x-5) si apoi catul obtinut se imparte la x-(-5). Schema lui Horner are avantajul ca se preteaza la prelucrare pe calculator.

2. Divizibilitatea polinoamelor

Pentru a determina **cmmdc** a doua polinoame, se foloseste **algoritmul lui Euclid** si anume:

Se imparte f(x) la g(x) si se obtine un cat si un rest. In continuare se imparte deimpartitul la restul obtinut. Se tot efectueaza impartiri ale deimpartiului la rest, pana se obtine rest=0. **Ultimul rest nenul este cmmdc(f,g).**

Mentiune 1 Daca se cere **cmmmc(f,g)** se foloseste proprietatea ca

$$\textbf{cmmmc(f,g)} \cdot \textbf{cmmdc(f,g)} = \textbf{f} \cdot \textbf{g}$$

Practic, se calculeaza f ·g si apoi se calculeaza cmmdc(f,g) cu algoritmul lui Euclid. In continuare se afla cmmmc(f,g)=$\frac{\text{f·g}}{\text{cmmdc(f,g)}}$

Mentiune 2 Daca se cere sa se verifice daca f si g sunt **prime intre ele** se foloseste proprietatea ca **doua polinoame sunt prime daca au cmmdc=1.**

Practic, se calculeaza cmmdc(f,g) cu algoritmul lui Euclid si daca se obtine cmmdc(f,g)=1 se trage concluzia ca f si g sunt prime, altfel se trage concluzia ca nu sunt prime.

3. Radacinile ecuatiilor de grad superior. Radacini multiple.

• Un polinom P_n de gradul n, avand radacinile $x_1, x_2, \cdots x_n$ se poate scrie sub forma:

$$P_n = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

• Daca un polinom P(X) admite radacina x=a, atunci P(a)=0 (Teorema lui Bézout).

• Radacini multiple. O ecuatie poate avea radacini multiple (duble, triple, etc), in general de ordinul k de multiplicitate.

De exemplu x=α este radacina dubla daca x_1=x_2=α. In acest caz P(x) apare de forma:

$$P(x)_n = (x-\alpha)^2 \cdot (x-x_3) \cdots (x-x_n)$$

Inseamna ca P(x) se imparte exact la (x-α)^2, adica se imparte de exemplu cu schema lui Horner la (x-α) si apoi catul obtinut se imparte tot exact la (x-α). Alta abordare a problemei este sa se imparta P(x) la (x-a)^2, adica la x^2-2ax+a^2 prin metoda clasica de impartire de polinoame si sa se puna conditia ca restul sa fie zero.

Cel mai operativ pentru radacini multiple, este sa se foloseasca urmatoarea teorie:

Un polinom P(x) are radacina x=α ca radacina multipla de ordinul k de multiplicitate, daca:

$$P(\alpha) = 0$$
$$P^{'}(\alpha) = 0$$
$$P^{''}(\alpha) = 0$$
$$\cdots$$
$$P^{k-1}(\alpha) = 0$$
$$P^{k}(\alpha) \neq 0$$

---

4. Relatiile lui Viète

Fie de exemplu ecuatia de gradul 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avand radacinile x_1,x_2,x_3 .

Se pot scrie urmatoarele sume, numite relatiile lui Viète :

$$\begin{cases} S_1 = & x_1 + x_2 + x_3 & = -\frac{b}{a} \\ S_2 = & x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 & = +\frac{c}{a} \\ S_3 = & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 & = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

In mod similar se pot scrie relatiile lui Viète pentru orice grad n.

Daca se cunosc radacinile unei ecuatii , de exemplu y_1,y_2,y_3 $\cdots$ y_n, si se doreste aflarea ecuatiei care are acele radacini, se calculeaza sumele lui Viète S_1,S_2, $\cdots$ S_n, apoi se scrie expresia ecuatiei care are acele radacini:

$$1 \cdot Y^n - S_1 \cdot Y^{n-1} + S_2 \cdot Y^{n-2} \cdots S_n = 0$$

---

5. Rezolvari avansate ale ecuatiilor de grad superior

In afara de metodele de rezolvare clasice a ecuatiilor de grad superior, se pot folosi si metode avansate care utilizeaza derivatele, de exemplu:

- Folosind **Sirul lui Rolle**.
- Folosind reprezentarea grafica a functiilor care formeaza ecuatia.

Memo 17 ecuatii de grad superior

Partea a I-a

Tip 1. Ecuatii bipatrate

Exemplu: Rezolvati ecuatia $x^4 - 6x^2 + 6 = 0$

Idee: Se noteaza $x^2 = y$ si se obtine ecuatie de gradul doi care se rezolva, apoi se afla x_1, x_2, x_3, x_4.

Tip 2. Ecuatii reciproce de grad trei

Exemplu: Rezolvati ecuatia $5x^3 + 31x^2 + 31x^1 + 5 = 0$

Teorie 1: Se numeste **ecuatie reciproca**, o ecuatie care are coeficientii egal departati, egali.

Teorie 2: Orice ecuatie reciproca de grad impar admite radacina x=-1.

Teorie 3: Un polinom P_n de gradul n, avand radacinile $x_1, x_2, \cdots x_n$ se poate scrie sub forma:

$$P_n = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Teorie 4: Daca avem pentru o impartire Deimpartit, Impartitor, Cat, Rest, este corecta relatia:

$$Deimpartitul = Catul \cdot Impartitorul + Restul$$

Idee: Fie $P_3(x)$ expresia egala cu zero. Deoarece admite radacina x=-1, inseamna ca $P_3(x)$ se imparte la x-(-1) adica la x+1. Se efectueaza impartirea $P_3(x)$ la (x+1) si obtinem $Cat_2(x)$ si rest=0. Deci $P_3(x) = (x + 1) \cdot Cat_2(x)$. Rezolvam $Cat_2(x) = 0$ si aflam celelalte doua radacini.

Tip 3. Ecuatii reciproce de grad patru

Exemplu: Rezolvati ecuatia $2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x^1 + 2 = 0$

Idee: Se imparte ecuatia cu x^2, dupa care se noteaza $(x + \frac{1}{x}) = y$. Se exprima totul in y. Se rezolva ecuatia de gradul doi in y, apoi se afla x_1, x_2, x_3, x_4.

Tip 4. Ecuatii reciproce de grad cinci

Exemplu: Rezolvati ecuatia $20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x^1 + 20 = 0$

Idee: Fiind ecuatie reciproca de grad impar, are radacina x=-1. Se procedeaza ca in cazul ec. reciproce de grad trei si din $P_5(x) = (x+1)Q_4(x)$, prin impartirea lui $P_5(x)$ la (x+1) se obtine $Q_4(x)$ ca ecuatie reciproca de gradul 4, care se rezolva ca orice ecuatie reciproca de gradul patru.

Tip 5. Ecuatii care admit radacina $x = a + b \cdot i$

Exemplul 1: Rezolvati ecuatia $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx^1 + e = 0$ stiind ca admite radacina x=1+i.

Teorie: Daca o ecuatie admite radacina x=a+bi, atunci admite si radacina x=a-bi

Idee: Fie de exemplu polinomul $P_4(x)$ care stim ca admite radacina $x_1 = a+bi$. Conform teoriei, $x_2 = a - bi$. Inseamna ca putem scrie

$$P_4(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot Q_2(x)$$

Calculam $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ si scapam de i, notam forma obtinuta pentru comoditatea scrierii cu R(x). Deci $P_4(x) = R(x) \cdot Q_2(x)$. Aflam pe $Q_2(x)$ impartind pe $P_4(x)$ la R(x). Rezolvam $Q_2(x) = 0$ si aflam de aici pe x_3, x_4. Pe x_1 in cunoastem din enunt ca fiind x=a+bi, iar pe x_2 in cunoastem din teorie ca fiind x=a-bi.

Exemplul 2: Determinati a si b, dupa care rezolvati ecuatia

$$x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax^1 + b = 0$$

stiind ca admite radacina x=1+2i

Teorie: Daca un polinom P(X) admite radacina x=a, atunci P(a)=0 (Teorema lui Bézout).

Idee: Deoarece P(x) admite radacinile x=a si x=b, conform teoremei lui Bézout, putem scrie ca P(a)=0 si P(b)=0. Am obtinut un sistem pe doua ecuatii cu doua necunoscute, pe care il rezolvam si aflam pe a si pe b. Acum cunoastem forma lui P(x) si folosim teorie conform careia daca polinomul admite radacina x=1+2i, inseamna ca admite si radacina x=1-2i. Procedam ca si in cazul problemei anterioare si aflam si celelalte radacini.

Tip 6. Ecuatii care admit radacina $x = a + \sqrt{b}$

Exemplu: Rezolvati ecuatia $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x^1 + 2 = 0$ stiind ca admite radacina $x = 1 - \sqrt{2}$.

Teorie: Daca o ecuatie admite radacina $x = a + \sqrt{b}$, atunci admite si radacina $x = a - \sqrt{b}$

Idee: Similar cu problema anterioara. Fie de exemplu polinomul $P_4(x)$ care stim ca admite radacina $x_1 = a + \sqrt{b}$. Conform teoriei, $x_2 = a - \sqrt{b}$. Inseamna ca putem scrie

$$P_4(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot Q_2(x)$$

Calculam $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ si scapam de $\sqrt{b}$, notam forma obtinuta pentru comoditatea scrierii cu R(x). Deci $P_4(x) = R(x) \cdot Q_2(x)$. Aflam pe $Q_2(x)$ impartind pe $P_4(x)$ la R(x). Rezolvam $Q_2(x) = 0$ si aflam de aici pe x_3, x_4. Pe x_1 in cunoastem din enunt ca fiind $x = a + \sqrt{b}$, iar pe x_2 in cunoastem din teorie ca fiind $x = a - \sqrt{b}$.

Memo 18 Ecuatii de grad superior - Continuare

Partea a -II - a

Tip 7. Ecuatii cu coeficientul de grad maxim =1

Exemplu: Rezolvati ecuatia $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$

Teorie: Radacinile intregi ale ecuatiei **ar putea fi** printre divizorii termenului liber.

Idee: Se scot divizorii termenului liber, ex: +1,-1,+2,-2,+4,-4 si se verifica pe rand daca sunt radacini cu teorema lui Bézout. Adica se verifica daca P(+1)=0. Daca este egal cu zero, inseamna ca este radacina, altfel nu este. Se fac verificarile pt toti divizorii termenului liber. Daca gasim de exemplu doua radacini, fie x_1 si x_2, scriem $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)Q_2(x)$. Calculam $(x - x_1)(x - x_2)$ si obtinem o ecuatie de gradul doi, o notam pt comoditatea scrierii cu R(x). Impartim pe P(x) la R(x) si obtinem $Q_2(x)$. Rezolvam $Q_2(x) = 0$ si aflam x_3 si x_4.

Tip 8. Caz general=Ecuatii cu coeficient de grad maxim diferit de 1
(Valabil si pentru coeficient grad maxim egal cu 1 ca si caz particular)

Exemplu: Rezolvati ecuatia $6x^4 - 17x^3 - x^2 + 8x - 2 = 0$

Teorie: Radacinile ecuatiei **ar putea fi** de forma $\alpha = \frac{p}{q}$, p=divizor al termenului liber , iar q=divizor al coeficientului de grad maxim.

Idee: Metoda implica multe calcule. Se scot divizorii termenului liber, ex: p= +1,-1,+2,-2 si divizorii coeficientului de rang maxim ex: q=+1,-1,+2,-2,+3,-3,+6,-6. Se formeaza toate combinatiile de tip $\alpha = \frac{p}{q}$, si anume $\frac{+1}{+1}, \frac{+1}{-1}, \frac{+1}{+2} \cdot \cdot$, s.a.m.d. si se verifica cu teorema lui Bézout daca $P(\alpha)$=0. Daca se gasesc doua solutii, se procedeaza mai departe ca in cazul problemei anterioare.

Tip 9. Ecuatii binome

Exemplu: Rezolvati ecuatia $3x^7 = 5$

Teorie: Se aduce ecuatia la forma $x^n = a$ si se scrie numarul a ca numar complex, de forma $r(cos(\alpha)+i\cdot sin(\alpha))$. Se folosesc eventual formele $1 = cos(0)+ i\cdot sin(0)$, respectiv $-1 = cos(\pi)+i\cdot sin(\pi)$. Se obtine $x^n = r(cos(\alpha)+i\cdot sin(\alpha))$ si se aplica formula radicalului dintr-un numar complex si obtinem radacinile:

$$x_k = \sqrt[n]{r}(cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \cdot sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}), k = 0, 1 \cdots n - 1$$

De exemplu pentru $3x^7 = 5$ se scrie $x^7 = \frac{5}{3} \cdot 1$, adica $x^7 = \frac{5}{3} \cdot (cos(0) + i \cdot sin(0))$ deci

$$x_k = \sqrt[7]{\frac{5}{3}}(cos\frac{0 + 2k\pi}{7} + i \cdot sin\frac{0 + 2k\pi}{7}), k = 0, 1 \cdots 6$$

Tip 10. Alte metode de rezolvare a ecuatiilor de grad superior

- Folosind teorema lui Bézout, pentru radacini multiple(materie clasa X)
- Folosind relatiile lui Viète(materie clasa X)
- Folosind sirul lui Rolle(materie de clasa XI, implica derivate)
- Rezolvare grafica(materie de clasa XI, uneori implica derivate)

1. Calculul determinantilor

a) Determinanti de ordin 1:

$$\left| \ a \ \right| = a$$

b) Determinanti de ordin 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

c) Determinanti de ordin 3:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + d \cdot h \cdot c + b \cdot f \cdot g - c \cdot e \cdot g - b \cdot d \cdot i - f \cdot h \cdot a$$

Aceasta metoda se numeste *regula triunghiului*

d) Determinanti de ordin >= 4:

Nu exista o regula de genul regulilor anterioare, ci se procedeaza astfel:

Fie de exemplu urmatorul determinant de ordin 4:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

Se **dezvolta** determinantul dupa o linie sau dupa o coloana. De mentionat ca se poate alege orice linie , respectiv orice coloana, rezultatul obtinut este acelasi. Adica daca dezvoltam dupa linia 1 este ok, sau daca dupa linia 2 este tot ok, daca dezvoltam dupa coloana 1 este ok, dupa coloana 2 este tot ok, s.a.m.d.

Alegem de exemplu sa dezvoltam dupa linia 1. Dezvoltarea determinantului dupa linia 1 este urmatoarea:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+3} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot d \cdot \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Se observa ca pornind de la un determinant de ordin patru, am ajuns la determinanti de ordin trei, pe care ii putem calcula. Practic am reusit sa coboram

gradul determinantului cu o unitate. In general, pentru a calcula un determinant de ordin n , prin aceasta metoda se ajunge la determinanti de ordin *n-1* , apoi aplicand metoda din nou, determinantii de ordin *n-1* se reduc la determinanti de ordin *n-2* , s.a.m.d. pana se ajunge la determinanti de ordin 3, pentru care avem metoda efectiva de calcul.

Acest determinant "redus", de exemplu $\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix}$ pentru elementul aflat la intersectia liniei 1 cu coloana 1, se numeste **minor** si se noteaza cu Γ_{11}. In general la intersectia liniei i cu coloana j, se gaseste elementul a_{ij}, avand minorul Γ_{ij}. Dezvoltarea unui determinant dupa o anumita linie sau dupa o anumita coloana, reprezinta de fapt o suma de grupari de genul $(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \Gamma_{ij}$ pentru acea linie, respectiv coloana. Dezvoltarea unui determinant se poate exprima pe scurt astfel:

$$d = \sum (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \Gamma_{ij}$$

---

2. Proprietati ale determinantilor

Se observa faptul ca un determinant este mai usor de calculat daca linia(sau coloana) dupa care se alege dezvoltarea are cat mai multe elemente egale cu zero. Din acest motiv, este de preferat ca pentru calculul unui determinant sa alegem o linie(sau coloana), sa facem cat mai multe zerouri pe acea linie(sau coloana) si doar apoi sa dezvoltam determinantul. Pentru a face zerouri pe o linie(sau coloana) se pot folosi urmatoarele proprietati:

a) Daca la un determinant se aduna o linie la alta linie, valoare determinantului este aceeasi. Daca notam de exemplu linia i cu L_i si linia j cu L_j , inseamna ca este corecta operatia $L_i = L_i + L_j$

b) Daca la un determinant se scade o linie din alta linie, valoare determinantului este aceeasi, adica este corecta operatia $L_i = L_i - L_j$

c) Daca la un determinant se inmulteste o linie cu un numar real, de exemplu α si apoi se aduna valoarea obtinuta la alta linie, valoare determinantului este aceeasi, adica este corecta operatia $L_i = L_i + \alpha \cdot L_j$. Se observa ca pentru $\alpha = +1$ se obtine cazul **a)** iar pentru $\alpha = -1$ se obtine cazul **b)**. De remarcat ca α poate fi orice numar real, de exemplu $\alpha = \frac{1}{3}$ este ok.

In concluzie, de retinut ca sunt corecte urmatoarele relatii:

$a)$ $L_i = L_i + L_j$ $\quad b)$ $L_i = L_i - L_j$ $\quad c)$ $L_i = L_i + \alpha \cdot L_j$

Similar si pentru coloane, adica notand coloana cu C, sunt corecte operatiile:

$a)$ $C_i = C_i + C_j$ $\quad b)$ $C_i = C_i - C_j$ $\quad c)$ $C_i = C_i + \alpha \cdot C_j$

---

3. Din cele prezentate rezulta urmatoarele consecinte:

1) Un determinat are valoarea zero, daca are pe o linie (sau pe o coloana) toate elementele egale cu zero.

2) Un determinant are valoarea zero, daca are doua linii (sau doua coloane) identice.

3) Un determinant are valoarea zero, daca are doua linii (sau doua coloane) proportionale.

4) Se poate scoate factor comun de pe o linie(sau coloana) a unui determinant, adica de exemplu, este corecta urmatoarea operatiune:

$$\begin{vmatrix} \alpha \cdot a & b \\ \alpha \cdot c & d \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

---

1. Notiunea de matrice

Definitie: O matrice reprezinta un tablou de elemente.

Fie de exemplu matricea X=$\left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right|$ care are 2 linii si trei coloane, deci putem spune ca X apartine multimii matricilor cu 2 linii si 3 coloane, adica X $\in \mathcal{M}_{2,3}$ De mentionat ca primul indice reprezinta numarul de linii iar al doilea indice reprezinta numarul de coloane. In general, multimea matricilor cu m linii si n coloane se noteaza cu $\mathcal{M}_{m,n}$

- Daca m=n, adica numarul de linii este egal cu numarul de coloane, matricea se numeste *matrice patratica*, iar multimea matricilor nu se scrie $\mathcal{M}_{m,m}$ ci mai simplu, $\mathcal{M}_m$. Daca m este diferit de n, matricea se mai numeste matrice dreptunghiulara.

- Daca m=1, adica matricea are o singura linie, matricea se numeste *matrice linie* si se poate scrie de exemplu X $\in \mathcal{M}_{1,n}$.

- Daca n=1, adica matricea are o singura coloana, matricea se numeste *matrice coloana* si se poate scrie de exemplu X $\in \mathcal{M}_{m,1}$.

- Se observa ca matricea linie si matricea coloana, reprezinta de fapt vectori.

2. Operatii cu matrici

Fie matricile:
A=$\left|\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right|$ si B=$\left|\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right|$

• **Adunare matrici:** A+B=$\left|\begin{array}{cc} a+A & b+B \\ c+C & d+D \end{array}\right|$

• **Scadere matrici:** A - B=$\left|\begin{array}{cc} a-A & b-B \\ c-C & d-D \end{array}\right|$

• **Inmultire matrice cu un scalar:** $\alpha\cdot$ A=$\left|\begin{array}{cc} \alpha\cdot a & \alpha\cdot b \\ \alpha\cdot c & \alpha\cdot d \end{array}\right|$, pt.$\alpha$ scalar.

• **Inmultirea a doua matrici:**

Fie matricile: A=$\left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right|$ si B=$\left|\begin{array}{ccc} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{array}\right|$

$$\text{A} \cdot \text{B} = \left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{ccc} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{ccc} aA+bD+cG & aB+bE+cH & aC+bF+cI \\ dA+eD+fG & dB+eE+fH & dC+eF+fI \end{array}\right|$$

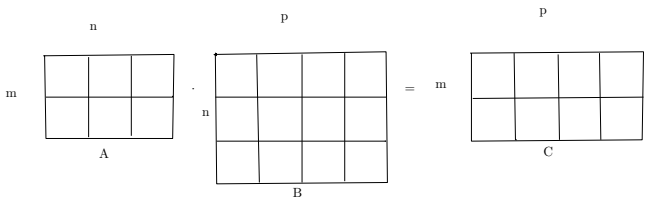
Se poate retine mai usor privind in acest mod: A·B=$\left|\begin{array}{ccc} L_1C_1 & L_1C_2 & L_1C_3 \\ L_2C_1 & L_2C_2 & L_2C_3 \end{array}\right|$,

unde L_i=linia i , iar C_j=coloana j

Analizand algoritmul de inumltire a doua matrici, se observa ca daca se inmulteste o matrice cu *m linii* si *n coloane* cu o alta matrice avand *n linii* si *p coloane*, matricea rezultata va avea *m linii* si *p coloane* . Pentru a se putea

efectua inmultirea, este necesar ca numarul de linii a celei de a doua matrici sa fie egal cu numarul de coloane a primei matrici.

De exemplu pentru inmultirea A · B = C (unde A are m linii si n coloane, iar B are n linii si p coloane) se respecta regulile prezentate in urmatorul desen:



Se observa ca inmultirea matricilor NU este COMUTATIVA

• **Impartirea a doua matrici:**

Nu exista impartire a doua matrici. Pentru "simularea impartirii matricilor" se foloseste notiunea de *matrice inversa,* notata cu A^{-1} (pentru matricea initiala A), care se va prezenta ulterior.

---

3. Matrici deosebite

Fie de exemplu matrici de 3 linii si 3 coloane, adica matrici din $\mathcal{M}_3$

a) matricea nula. Pentru $\mathcal{M}_3$:

$$O_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

In general, matricea nula pentru $\mathcal{M}_n$, se noteaza cu O_n si este o matrice patrata, cu n linii si n coloane, avand toate elementele nule .

Matricea nula are proprietatea ca este neutra in raport cu adunarea matricelor, adica $A+O_n = O_n+A=A$ pentru orice $A \in \mathcal{M}_n$.

b) matricea unitate. Pentru $\mathcal{M}_3$:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

In general, matricea unitate pentru $\mathcal{M}_n$, se noteaza cu I_n si este o matrice patrata, cu n linii si n coloane, avand toate elementele nule cu exceptia elementelor de pe diagonala principala care au toate valoarea 1.

Matricea unitate are proprietatea ca este neutra in raport cu inmultirea matricelor, adica $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ pentru orice $A \in \mathcal{M}_n$.

Memo 21 Matricea inversa. Rangul unei matrici

1. Matricea inversa

Fie de exemplu matricea patrata de ordinul 3, A=$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Pentru a determina matricea inversa, notata cu A^{-1} se procedeaza astfel:

1. Se calculeaza determinantul matricii A.

a) Daca det(A)=0, inseamna ca nu exista matricea inversa A^{-1} , sau altfel spus, matricea A nu este inversabila. In aceasta situatie, precesul se opreste aici.

b) Daca det(A) diferit de zero, inseamna ca exista matricea inversa A^{-1} , sau altfel spus, matricea A este inversabila. Se continua cu pasul urmator.

2. Se formeaza matricea transpusa, notata cu A^t, si anume linia 1 din A devine coloana 1 din A^t, linia 2 din A devine coloana 2 din A^t , s.a.m.d. Deci se obtine:

$$A^t = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

3. Se formeaza matrice adjuncta (sau reciproca), notata cu A^*, **din $\mathbf{A^t}$**, care va avea tot atatea elemente ca si A^t, si va avea urmatoarea forma:

$$A^* = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

unde $x_{11}=(-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (e \cdot i - h \cdot f) = ei - hf =$ numar.

$x_{12}=(-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} = -1 \cdot (b \cdot i - h \cdot c) = -bi + hc =$ numar, samd.

Atentie: A nu se confunda cu metoda de dezvoltare a unui determinant, unde se folosea factorul generic $(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \Gamma_{ij}$ iar aici nu se foloseste a_{ij}

4. Se formeaza A^{-1} cu formula:

$$A^{-1}=\frac{A^*}{det(A)} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_{11}}{det(A)} & \frac{x_{12}}{det(A)} & \frac{x_{13}}{det(A)} \\ \frac{x_{21}}{det(A)} & \frac{x_{22}}{det(A)} & \frac{x_{23}}{det(A)} \\ \frac{x_{31}}{det(A)} & \frac{x_{32}}{det(A)} & \frac{x_{33}}{det(A)} \end{vmatrix}$$

Se observa motivul pentru care la punctul 1 se concluziona ca nu exista A^{-1} daca se obtinea det(A)=0.

5. Pas optional, dar recomandabil daca este timp si anume verificarea lui A^{-1}. Se efectueaza inmultirea $A \cdot A^{-1}$ si se verifica daca intradevar se obtine matricea unitate, in cazul exemplului prezentat $I_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ Pentru cazul general, daca se obtine I_n pentru o matrice patrata de ordinul n, inseamna ca A^{-1} a fost calculat corect, altfel inseamna ca s-a gresit si trebuie verificat calculul.

Mentiuni

1. Se observa ca daca se cere sa se verifice daca o matrice este inversabila (sau altfel spus daca exista matrice inversa), problema se reduce la verificarea determinantului matricii. Daca determinantul matricii este diferit de zero inseamna ca matricea este inversabila iar daca determinantul matricii este egal cu zero inseamna ca matricea nu este inversabila.

2. Problemele care folosesc matricea inversa sunt in general de tipurile urmatoare:

- Se da o matrice si se cere sa se determine matricea inversa.

- Se da o matrice si se cere sa se verifice daca matricea este inversabila.

- Rezolvarea ecuatiilor matriciale.

- Rezolvarea sistemelor de ecuatii liniare prin metoda matriciala.

---

2. Rangul unei matrici

Fie de exemplu urmatoarea matrice dreptunghiulara:

$$X = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{vmatrix}$$

Prin definitie, rangul unei matrici reprezinta ordinul celui mai mare determinant patrat, diferit de zero, extras din matrice.

In cazul nostru, matricea fiind de tipul 3x4, ordinul maxim la care *putem spera* este 3x3. Extragem din matrice un determinant de ordin 3x3 , il calculam si verificam daca este diferit de zero. Daca este diferit de zero, atunci rangul matricii este 3 si ne oprim. Daca determinantuld este egal cu zero, alegem alt determinant de ordin 3x3 si procedam similar.

Daca toti determinantii de ordin 3x3 sunt egali cu zero, *coboram din pretentii* si incercam cu determinanti de ordin 2x2 in mod similar.

Daca toti determinantii de ordin 2x2 sunt egali cu zero, *coboram din pretentii* si incercam cu determinanti de ordin 1x1.

Se observa in *cel mai rau caz* vom gasi *macar* un determinant diferit de zero de ordinul 1, cu exceptia situatiei in care matricea are toate elementele nule, ceea ce ar insemna ca rangul ar fi egal cu zero. Din cele prezentate anterior se poate sesiza ca algoritmul este finit.

Mentiuni

1. Se observa ca metoda prezentata porneste de la o abordare a matricii de genul *de sus in jos*, in sensul ca se incepe cu determinantii patrati extrasi din matrice, de rang maxim.

2. Trebuie avuta atentie sa se ia toti determinantii de o anumita dimensiune, adica *sa nu se scape din vedere* unii determinanti.

3. Problemele care folosesc rangul unei matrici sunt in general de tipurile urmatoare:

- Se da o matrice si se cere sa i se determine rangul.

- Se da o matrice si se cere sa se discute rangul in functie de un parametru.

- Rezolvarea sistemelor de ecuatii liniare.

Memo 22 Sisteme de ecuatii liniare

1. Sisteme de ecuatii rezolvate matricial

Fie de exemplu sistemul: $\begin{cases} x+y+z & =7 \\ 3x+7y+5z & =2 \\ 6x-3y+z & =1 \end{cases}$

Rezolvarea matriciala a sistemului se face urmand urmatorii pasi:

- Se formeaza matricea coeficientilor sistemului, in cazul nostru A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

- Se formeaza matricea coloana cu necunoscutele sistemului, X=$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

- Se formeaza matricea coloana cu termenii liberi ai sistemului, B=$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Sistemul este echivalent cu urmatoarea ecuatie matriciala:

$$\mathrm{A}\cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$$

- Se rezolva ecuatia matriciala anterioara in mod obisnuit, adica se calculeaza A^{-1}, se inmulteste ecuatia matriciala la stanga cu A^{-1} si se obtine $\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\cdot \mathrm{B}$. Se obtine matricea coloana X, de unde se scoate x,y,z.

Mentiune Aceasta metoda se foloseste rar, eventual doar daca se solicita in mod explicit prin enunt sa se rezolve prin aceasta metoda.

2. Regula lui Cramer

Fie de exemplu sistemul: $\begin{cases} x+y+z & =7 \\ 3x+7y+5z & =2 \\ 6x-3y+z & =1 \end{cases}$

Se efectueaza urmatorii pasi:

- Se formeaza matricea coeficientilor sistemului, in cazul nostru A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

- Se calculeaza determinantul matricii A, il notam de exemplu cu Δ (delta).

• Daca Δ =0 , inseamna ca sistemul nu se poate rezolva cu regula lui Cramer si procesul se opreste aici.

• Daca $\Delta \neq 0$, inseamna ca sistemul se poate rezolva cu regula lui Cramer si se continua cu etapa urmatoare.

- Se calculeaza Δ_x, prin inlocuirea coloanei cu coeficientii lui x din matricea sistemului, cu coloana termenilor liberi, adica se obtine: Δ_x=$\begin{bmatrix} \mathbf{7} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 7 & 5 \\ \mathbf{1} & -3 & 1 \end{bmatrix}$

- Se calculeaza Δ_y si Δ_z in mod similar.

- Se calculeaza x=$\frac{\Delta_x}{\Delta}$ y=$\frac{\Delta_y}{\Delta}$ z=$\frac{\Delta_z}{\Delta}$ solutia sistemului fiind (x,y,z).

Se observa motivul pentru care un sistem avand $\Delta = 0$ nu se poate rezolva cu regula lui Cramer si anume deoarece Δ apare la numitor.

3. Studiul compatibilitatii sistemelor

Fie de exemplu sistemul: $\begin{cases} 3x+y+2z &= 8 \\ 2x-3y+z &= 1 \\ 5x+9y+4z &= 22 \end{cases}$

Se efectueaza urmatorii pasi:

- Se formeaza matricea coeficientilor sistemului, in cazul nostru A= $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

- Se calculeaza determinantul matricii A, il notam de exemplu cu Δ (delta).

• Daca $\Delta \neq 0$, inseamna ca sistemul este **compatibil determinat**, se poate rezolva cu regula lui Cramer si nu este necesara prezenta metoda . Se rezolva cu regula lui Cramer prezentata anterior si procesul se opreste aici.

• Daca $\Delta = 0$, inseamna ca sistemul nu se poate rezolva cu regula lui Cramer si efectuam pasii urmatori. In cazul nostru din calcul obtinem $\Delta = 0$.

- Se extrage din matricea sistemului, **un determinant patrat de cel mai mare ordin, diferit de zero** , numit **determinant principal**, pe care il notam de exemplu δ (delta mic).

De exemplu $\delta = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$= -9-2=-11 $\neq 0$

- Se stabilesc **ecuatiile principale** , in acest caz ecuatia 1 si ecuatia 2 si **ecuatiile secundare** , in acest caz ecuatia 3. Se stabilesc **necunoscutele principale** , in acest caz x si y si **necunoscutele secundare** , in acest caz z.

- Se formeaza **determinantul caracteristic**, notat cu Δ_c, *prin bordarea determinantului principal* δ *cu o linie formata din coeficientii corespunzatori din* **una dintre** ecuatiile secundare si cu *o coloana formata din termenii liberi corespunzatori*. Pentru cazul nostru, se obtine $\Delta_c = \begin{bmatrix} \mathit{3} & \mathit{1} & \mathbf{8} \\ \mathit{2} & \mathit{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{22} \end{bmatrix}$

- Se calculeaza Δ_c, (in cazul nostru $\Delta_c = 0$) si se interpreteaza astfel:

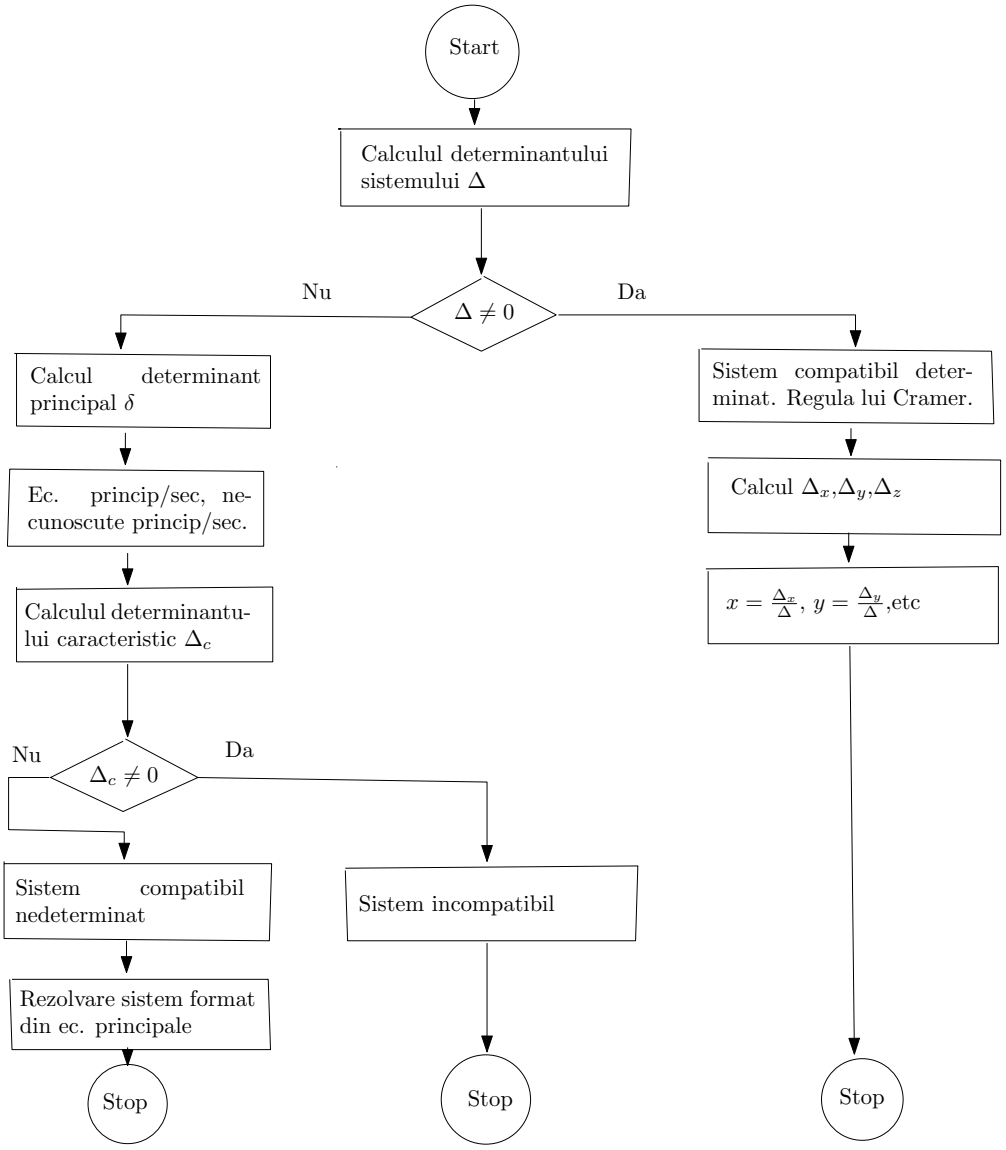
• Daca $\Delta_c \neq 0$ se trage concluzia ca sistemul este **incompatibil** si procesul se opreste aici.

• Daca $\Delta_c = 0$ se trage concluzia ca sistemul este **compatibil nedeterminat** (in cazul de fata, **sistem compatibil simplu nederminat** deoarece avem o singura necunoscuta secundara) si se continua cu pasul urmator:

- Se rezolva **sistemul format din ecuatiile principale si anume se scot necunoscutele principale in functie de necunoscutele secundare**. Practic se scrie sistemul format din ecuatiile secundare, se trec necunoscutele secundare in membrul cu termenii liberi si se scot necunoscutele principale in functie de necunoscutele secundare. In cazul nostru, se rezolva sistemul $\begin{cases} 3x+y &= 8-2z \\ 2x-3y &= 1-z \end{cases}$ prin metode obisnuite (metoda reducerii sau substitutiei sau chiar Cramer) si se scoate x=f(z) si y=f(z), z $\in$ R. Concret obtinem x=$\frac{25-7z}{11}$, y=$\frac{13-z}{11}$, z $\in$ R. Observam ca intradevar sistemul **este compatibil** (am putut obtine solutii pentru x si y) si **simplu nederminat**, deoarece x si y depind de un singur parametru real z.

Memo 23 Compatibilitatea sistemelor de ecuatii prezentata grafic

Reprezentare grafica a etapelor de analizare a compatibilitatii unui sistem cu n ecuatii si n necunoscute:



Se recomanda analizarea sistemelor dupa modelul acesta, eventual cu adaptarea ceruta de specificul problemei.

1. Discutarea naturii unui sistem dupa parametrii reali

Se urmeaza etapele prezentate in graficul studiului compatibilitatii si se trateaza pe cazuri, dupa valorile parametrilor. De exemplu daca avem un sistem de 3 ecuatii cu 3 necunoscute, cu un parametru m. Calculam determinantul sistemul si obtinem de exemplu $\Delta = (m-5)\cdot(m+7)$. Se procedeaza astfel:

Caz 1 Pentru $(m-5)\cdot(m+7) \neq 0$, adica pentru m$\neq$ 5 si m$\neq -7$ sistemul este compatibil determinat si se aplica regula lui Cramer. **Se scot efectiv in functie de m** Δ apoi $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ etc apoi x,y,z.

Caz 2 Pentru m=5 **se inlocuieste efectiv m=5** in sistemul initial, se obtine un sistem fara parametrii , care se rezolva absolut obisnuit ca orice sistem obisnuit fara parametrii. Bineintetes ca se va obtine $\Delta = 0$ si se va urma traseul corespunzator.

Caz 3 Pentru m=-7 **se inlocuieste efectiv m=-7** in sistemul initial, se obtine un sistem fara parametrii , care se rezolva absolut obisnuit ca orice sistem obisnuit fara parametrii. Bineintetes ca se va obtine $\Delta = 0$ si se va urma traseul corespunzator.

Daca se va obtine Δ_c in functie de parametru, (de exemplu$\Delta_c = m-9$) se va separa din nou pe cazuri, adica:

Caz a) Pentru $m-9 \neq 0$ adica $m \neq 9$, sistemul este incompatibil si stop.

Caz b) Pentru $m-9=0$ adica $m=9$, sistemul este compatibil si nedeterminat si se continua conform grafic compatibilitate, prin rezolvarea sistemului format din ecuatiile principale.

Exemplu Discutati natura sistemului dupa valorile parametrului m si rezolvati sistemul :

$$\begin{cases} x - my + z & = 1 \\ x - y + z & = 1 \\ mx + m^2y - z & = m^2 \end{cases}$$

2. Sisteme omogene

Sistem omogen este prin definitie un sistem care are toti termenii liberi egali cu zero.

Se pastreaza toate proprietatile si modul de lucru cunoscut de la sisteme, singura noutate fiind faptul ca un sistem omogen admite intotdeauna solutia x=y=z= $\cdots$ =0 numita **solutie banala** sau **solutie nula**.

Analizand graficul studiului compatibilitatii, se observa ca daca $\Delta \neq 0$ rezulta ca sistemul este compatibil determinat, adica admite solutie **unica**. Deoarece sistemul omogen admite intotdeauna solutia banala, inseamna ca pentru $\Delta \neq 0$, solutia banala este **unica solutie**. Prin urmare daca pentru un sistem omogen se cere sa se puna conditia ca sistemul **sa nu contina doar solutia banala**, trebuie pusa conditia ca $\Delta = 0$.

Exemplu Rezolvati urmatorul sistem omogen:

$$\begin{cases} x+2y+z+t & =0 \\ 2x+y+z+2t & =0 \\ x+2y+2z+t & =0 \\ x+y+z+t & =0 \end{cases}$$

---

3. Sisteme cu numar de ecuatii diferit de numarul de necunoscute

Poate aparea una dintre urmatoarele doua situatii:

a) Numarul de ecuatii este mai mic decat numarul de necunoscute.

Exemplu Rezolvati urmatorul sistem :

$$\begin{cases} x-2y+z+t & =1 \\ x-2y+z-t & =-1 \\ x-2y+z+5t & =6 \end{cases}$$

b) Numarul de ecuatii este mai mare decat numarul de necunoscute.

Exemplu Rezolvati urmatorul sistem :

$$\begin{cases} x+2y & =1 \\ 6x-8y & =1 \\ 5x+2y & =3 \end{cases}$$

Se recomanda ca exercitiu, analizarea graficului de studiu al compatibilitatii sistemelor pentru fiecare din aceste situatii.

Ca recomandari generale:

• Pentru cazul a) sistemul chiar daca este compatibil nu poate fi si determinat, deoarece suntem in situatia in care avem mai putine ecuatii decat necunoscute.

• Pentru cazul b) avem mai multe ecuatii decat necunoscute, deci sistemul ar putea fi determinat, dar trebuie de verificate solutiile obtinute pentru toate ecuatiile pentru a fi sigur ca sistemul este compatibil.

Teorie

Se considera evidente urmatoarele:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$. In general, $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$ pentru k > 0.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. In general $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ pentru k > 0.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$. In general, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ pentru a = subunitar.

Tipuri de limite de siruri

Tip 1 = Fractii simple

Exemple:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^2+5n+1}{4n^3+2n^2+3n+3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^2+5n+1}{4n^6+2n^2+3n+3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^2+5n+1}{4n^4+2n^2+3n+3}$

Idee: Se scoate factor fortat, atat la numitor cat si la numarator, **n** la puterea cea mai mare.

Tip 2 = Sume consacrate

Exemple:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots n}{3n^2+2n+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{3n^2+2n+1}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots n\cdot(n+1)}{4n^5+5}$

Idee: Se restrange suma conform regulilor cunoscute, dupa care problema devine de obicei de tipul 1.

Tip 3 = Radicali

Exemple:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n+5})$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-3n)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n+2})$

Idee: Se amplifica gruparea $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ cu $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ pentru a dispare radicalul de la numarator, unde se va obtine a-b, problema devenind de obicei de tipul 1. Similar, pentru gruparea $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, se amplifica cu $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

Tip 4 = Puteri

Exemple:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4\cdot 5^n+6\cdot 3^n}{5^n+3\cdot 2^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4\cdot 7^{n+3}+6\cdot 3^{n+1}}{7^{n+2}+4\cdot 3^{n+4}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4\cdot 5^n+6\cdot 6^n}{7^n+3\cdot 8^n}$

Idee: Se scoate factor fortat, atat la numitor cat si la numarator, puterea a^n la puterea cea mai mare, de exemplu pentru exemplul a), la numarator se scoate factor fortat 5^n iar la numitor tot 5^n.

Tip 5 = Gruparea gen $(1+\frac{1}{n})^n$. Nedeterminarea 1^∞

Exemple:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n-2})^{n+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n-5})^{n+2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2+3}{n^2-n})^{2n+1}$

Idee: Se incearca sa se ajunga la formula $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, respectiv pentru cazul general, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+A)^{\frac{1}{A}} = e$, unde A $\to$0 pentru n$\to\infty$.

Tip 6 = Teorema cleste

Exemple:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot sin(n+7)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$

Idee: Se foloseste **teorema cleste**:

Fie un sir a_n si o limita l. Daca $b_n <= a_n <= c_n$ si atat sirul $b_n \to l$ cat si $c_n \to l$, atunci $a_n \to l$. Daca l=0, regula se mai numeste **criteriul majorarii**.

Teorie

Se considera cunoscute urmatoarele:

a) Modul de calcul al limitelor de siruri

b) Descompunerea $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ si similar pentru orice polinom de gradul n.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$

Limitele de functii se pot calcula prin doua mari metode: clasic, adica fara a utiliza derivate si folosind metoda lui l'Hôpital care implica folosirea derivatelor. Unele probleme se rezolva mai usor prin o metoda, alte probleme prin cealalta. Nu exista o reteta care sa indice care e cea mai potrivita metoda pentru o anumita problema.

A) Tipuri de limite de functii clasice

(fara a folosi derivate)

Tip 1 = Limite cu $x \to \pm\infty$

Exemple:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^4+4x^2+2x+1}{3x^2+2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x+3}{x-5})^{2x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}+3x}{2x+1}$

Idee: Se lucreaza asemanator cu limitele de siruri, unde aveam $n \to \pm\infty$.

Tip 2 = Limite cu $x \to x_0$ si $x - x_0$ apare la numitor

Exemple:

a) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{-3(x^2+2)}{x-7}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2}{5+\frac{-6}{x-3}}$

Idee: Se face tabel si la final se obtine limita la stanga lui x_0 si limita la dreapta lui x_0.

Tip 3 = Limite din fractii de polinoame

Exemple:

a) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x-7}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x-3}$

Idee: Se incearca sa se descompuna atat numaratorul cat si numitorul dupa formula de genul $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (corespunzator gradului polinomului), sau eventual dupa alte formule, dupa care se incearca simplificarea factorului $x - x_0$.

Tip 4 = Limite de functii trigonometrice

Exemple:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(7x)}{3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg(3x)}{tg(7x)}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{sin(x-3)}{4(x-3)}$

Idee: Se foloseste formula $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$ si formulele obisnuite de la trigonometrie. De avut in vedere ca sin(0)=0 si cos(0)=1.

Metodele prezentate anterior fac parte din categoria de **calcul limite de functii prin metoda clasica** in sensul ca **nu** utilizeaza derivate. Limitele de functii se pot calcula si cu utilizarea derivatelor, folosind regula lui l'Hôpital, prezentata in continuare.

B) Teorema lui l'Hôpital

Limite de functii cu folosirea derivatelor

Calculul limitelor de functii se poate **uneori** simplifica prin utilizarea teoremei lui l'Hôpital.

Teorema lui l'Hôpital: Pentru nedeterminare de tipul $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$ este adevarata relatia:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'}{g'}$$

Cazuri particulare In cazul in care nedeterminarea nu este de tipul $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$, expresia data trebuie transformata in una din aceste forme. Astfel se procedeaza daca avem nedeterminari de tipul:

1. $[0\cdot\infty]$
2. $[\infty-\infty]$
3. $[1^\infty,\infty^0,etc]$ in general nedeterminari de forma f^g

Uneori este mai simplu de calculat o limita de functie prin l'Hôpital, alteori este mai simplu prin metode clasice (clasic adica fara derivate, adica fara l'Hôpital). **Nu exista o reteta** care sa recomande pentru o expresie oarecare daca e mai usor cu o metoda sau alta.

Pentru nederminari diferite de $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$, se procedeaza astfel:

---

1. Pentru nedeterminare $[0\cdot\infty]$

Fie de calculat $\lim\limits_{x\to x_0} f\cdot g$, unde $f\to 0$ si $g\to\infty$.

Se **rastoarna** una dintre functii, de exemplu:

$f\cdot g=\frac{g}{\frac{1}{f}}$ $[\frac{\infty}{\infty}]$ si acum se poate aplica regula lui l'Hôpital:

$$\lim_{x\to x_0} f\cdot g=\lim_{x\to x_0}\frac{g}{\frac{1}{f}}\ [\frac{\infty}{\infty}]\ =\lim_{x\to x_0}\frac{g^{'}}{(\frac{1}{f})'}$$

---

2. Pentru nedeterminare $[\infty-\infty]$

Fie de calculat $\lim\limits_{x\to x_0}(f-g)$, unde $f\to\infty$ si $g\to\infty$.

Se transforma astfel:

$f-g=f\cdot g\frac{(f-g)}{f\cdot g}=f\cdot g\cdot(\frac{f}{fg}-\frac{g}{fg})=f\cdot g\cdot(\frac{1}{g}-\frac{1}{f})=[\infty\cdot 0]=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f\cdot g}}[\frac{0}{0}]$ si acum se poate aplica regula lui l'Hôpital:

$$\lim_{x\to x_0}(f-g)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f\cdot g}}=\lim_{x\to x_0}\frac{(\frac{1}{g}-\frac{1}{f})'}{(\frac{1}{f\cdot g})'}$$

---

3. Pentru nedeterminari de tipul f^g. De exemplu 1^∞, ∞^0, etc.

Se foloseste formula $A=e^{ln(A)}$, si se ia A=f^g.

Memo 27 Aplicatii ale limitelor de functii

Continuitate, Derivate, Derivabilitate, Asimptote

1. Functii continue

Orice functie elementara este continua pe interval.
Studiul continuitatii se pune in puncte, de exemplu in punctul $x = x_0$. Se procedeaza astfel:

1. - Se calculeaza limita la stanga in x_0, $l_s|_{x=x_0} = lim_{x \to x_0 (x<x_0)} f(x)$
2. - Se calculeaza limita la dreapta in x_0, $l_d|_{x=x_0} = lim_{x \to x_0 (x>x_0)} f(x)$
3. - Se calculeaza valoarea functiei in punctul x_0, adica $f(x_0)$
4. - Daca limita la stanga in x_0 este egala cu limita la dreapta in x_0 si este egala cu $f(x_0)$, atunci functia f(x) este continua in punctul x_0, altfel f(x) nu este continua in punctul x_0.

Pe scurt, conditia de continuitate intr-un punct x_0 este ca

$$l_s|_{x=x_0} = l_d|_{x=x_0} = f(x_0)$$

Deoarece studiul continuitatii se face in puncte, problemele de continuitate apar la probleme la care f(x) se da sub forma de *acolada*, studiul efectuandu-se in punctele in care functia isi schimba forma.

2. Definitia derivatei

Derivata functiei f(x) in punctul x_0 se noteaza cu $f(x)^{'}_{x=x_0}$ si se defineste astfel:

$$f(x)^{'}_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Prin aplicarea formulei anterioare asupra functiile cunoscute, s-a obtinut tabelul de derivare.

3. Functii derivabile

Functiile elementare sunt derivabile pe intervale.
Studiul derivabilitatii se pune in puncte, de exemplu in punctul $x = x_0$. Se procedeaza astfel:

Functia f(x) este derivabila in punctul $x = x_0$, daca derivata la stanga in x_0 si derivata la dreapta in x_0 sunt **egale si finite**.

a) Derivata la stanga in punctul x_0 se noteaza cu $f^{'}s_{(x=x_0)}$ si se calculeaza cu formula de definitie a derivatei:

$$f(x)^{'}_{s}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x<x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se poate calcula cu regula lui l'Hôpital deoarece exista nedeterminare $\frac{0}{0}$ si se obtine

$$f(x)^{'}_{s}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x<x_0} f^{'}(x)$$

b) Derivata la dreapta in punctul x_0 se noteaza cu $f^{'}d_{(x=x_0)}$ si se calculeaza cu formula de definitie a derivatei:

$$f(x)^{'}_{d}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x>x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se poate calcula cu regula lui l'Hôpital deoarece exista nedeterminare $\frac{0}{0}$ si se obtine

$$f(x)_d^{'}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} f^{'}(x)$$

In concluzie, se calculeaza derivata la stanga punctului x_0 si derivata la dreapta lui x_0 . Daca aceste doua sunt **egale si finite**, atunci functia f(x) este derivabila in punctul x_0, altfel f(x) nu este derivabila in punctul x_0.

Deoarece studiul derivabilitatii se face in puncte, problemele de derivabilitate apar la probleme la care f(x) se da sub forma de *acolada*, studiul efectuandu-se in punctele in care functia isi schimba forma.

---

4. Asimptote

Pot exista trei tipuri de asimptote:
• **Asimptota orizontala** Se numeste asimptota orizontala la $+\infty$, o dreapta *orizontala* y=a, daca $lim_{x \to +\infty}$ f(x) = a

Similar, se numeste asimptota orizontala la -∞, o dreapta *orizontala* y=b, daca $lim_{x \to -\infty}$ f(x) = b
Daca $+\infty$ nu face parte din domeniul de definitie, atunci sigur nu avem asimptota orizontala la $+\infty$. Similar pentru -∞.
• **Asimptota verticala** Este o dreapta *verticala* x=c, daca $lim_{x \to c}$ f(x) = +-∞
• **Asimptota oblica** Studiu la $+\infty$:

Daca $+\infty$ nu face parte din domeniul de definitie, atunci sigur nu avem asimptota oblica la $+\infty$. Daca $+\infty$ face parte din domeniul de definitie dar am stabilit deja ca avem asimptota orizontala la $+\infty$ atunci sigur nu avem asimptota oblica la $+\infty$, deoarece functia nu poate avea simultan doua asimptote $+\infty$. Daca $+\infty$ apartine domeniului de definitie si $lim_{x \to +\infty}$ f(x) = +-∞ inseamna ca la $+\infty$ nu avem asimptota orizontala. In acest caz se verifica *daca eventual exista* asimptota oblica la $+\infty$. Se calculeaza $m = lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ Daca obtinem m *finit* , se continua cu calcularea lui $n = lim_{x \to +\infty}(f(x) - m \cdot x)$ Daca si n este finit, putem concluziona ca exista asimptota oblica la $+\infty$ si anume dreapta *oblica* $y = m \cdot x + n$.

Se studiaza in mod similar existenta asimptotei oblice la -∞.

Practic se procedeaza astfel:
1. Se stabileste domeniul de definitie, care se scrie ca reuniune de intervale.
2. Se calculeaza valorile functiei, respectiv limitele functiei *la capetele domeniului de definitie.*
3. Se stabilesc asimptotele analizand valorile functiei, respectiv valorile limitelor obtinute si definitiile asimptotelor, prezentate anterior. Se observa ca asimptotele orizontale si cele oblice pot apare la + ∞ sau la - ∞, iar asimptotele verticale pot apare la capete de intervale diferite de +- ∞. Unele functii au asimptote, iar altele nu.

Memo 28 Derivate

1. Definitia derivatei

Derivata functiei f(x) in punctul x_0 se noteaza cu $f(x)'_{x=x_0}$ si se defineste astfel:

$$f(x)'_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. Tabel derivate

Functia	Derivata
k(=constanta)	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot ln(a)$
e^x	e^x
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos(x)^2}$
$ctg(x)$	$-\frac{1}{sin(x)^2}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

3. Operatii cu derivate

$(f+g)^{'} = f^{'} + g^{'}$

$(f-g)^{'} = f^{'} - g^{'}$

$(f \cdot g)^{'} = f^{'} \cdot g + f \cdot g^{'}$

$(k \cdot f)^{'} = k \cdot f^{'}$, unde k=constanta

$(\frac{f}{g})^{'} = \frac{f^{'} \cdot g - f \cdot g^{'}}{g^2}$

• Avansat $(f^g)^{'} = f^g \cdot (g^{'} \cdot ln(f) + g \cdot \frac{f^{'}}{f})$

• Derivarea functiilor compuse: $f(u(v(x)))^{'} = f^{'}(u(v(x))) \cdot u^{'}(v(x)) \cdot v^{'}(x)$

4. Functii derivabile

Functia f(x) este derivabila in punctul $x = x_0$, daca derivata la stanga in x_0 si derivata la dreapta in x_0 sunt **egale si finite**.

a) Derivata la stanga in punctul x_0 se noteaza cu $f^{'}s_{(x=x_0)}$ si se calculeaza cu formula de definitie a derivatei:

$$f(x)^{'}_{s}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se poate calcula cu regula lui l'Hôpital deoarece exista nedeterminare $\frac{0}{0}$ si se obtine

$$f(x)^{'}_{s}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} f^{'}(x)$$

b) Derivata la dreapta in punctul x_0 se noteaza cu $f^{'}d_{(x=x_0)}$ si se calculeaza cu formula de definitie a derivatei:

$$f(x)^{'}_{d}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se poate calcula cu regula lui l'Hôpital deoarece exista nedeterminare $\frac{0}{0}$ si se obtine

$$f(x)^{'}_{d}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} f^{'}(x)$$

In concluzie, se calculeaza derivata la stanga punctului x_0 si derivata la dreapta lui x_0 . Daca aceste doua sunt **egale si finite**, atunci functia f(x) este derivabila in punctul x_0, altfel f(x) nu este derivabila in punctul x_0.

5. Principalele aplicatii ale derivatelor

• Teorema lui l'Hôpital

• Teorema lui Lagrange

• Teorema lui Rolle, Teorema lui Cauchy

• Functii concave , convexe

• Reprezentarea grafica a functiilor

Memo 29 Aplicatii ale derivatelor

Teoremele lui l'Hôpital, Rolle, Lagrange, Cauchy
Monotonie, Concavitate/Convexitate, Grafice de functii

1. Teorema lui l'Hôpital

Calculul limitelor de functii se poate **uneori** simplifica prin utilizarea teoremei lui l'Hôpital.

Teorema lui l'Hôpital: Pentru nedeterminare de tipul $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$ este adevarata relatia:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'}$$

Cazuri particulare In cazul in care nedeterminarea nu este de tipul $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$, expresia data trebuie transformata in una din aceste forme. Astfel se procedeaza daca avem nedeterminari de tipul:

1. $[0 \cdot \infty]$
2. $[\infty - \infty]$
3. $[1^{\infty}, \infty^0, etc]$ in general nedeterminari de forma f^g

Uneori este mai simplu de calculat o limita de functie prin l'Hôpital, alteori este mai simplu prin metode clasice (clasic adica fara derivate, adica fara l'Hôpital). Nu exista o reteta care sa recomande pentru o expresie oarecare daca e mai usor cu o metoda sau alta.

2. Teorema lui Rolle

Fie o functie f(x), un interval I si doua numere a,b, unde a < b si a,b ∈ I.

Daca :

1. Functia f(x) este continua pentru x ∈ [a,b]
2. Functia f(x) este derivabila pentru x ∈ (a,b)
3. f(a)=f(b)

atunci exista cel putin un punct **c** intre a si b, astfel incat **f'(c)=0**.

3. Teorema lui Lagrange

Fie o functie f(x), un interval I si doua numere a,b, unde a < b si a,b ∈ I.

Daca :

1. Functia f(x) este continua pentru orice x ∈ [a,b]
2. Functia f(x) este derivabila pentru orice x ∈ (a,b)

atunci exista un punct **c** intre a si b, astfel incat:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Consecinte alte teoremei lui Lagrange:

1. Daca f'(x) > 0 pe un interval, atunci f(x) este **crescatoare** pe acel interval

2. Daca f'(x) < 0 pe un interval, atunci f(x) este **descrescatoare** pe acel interval

3. Daca f'(x) $= 0$ pe un interval, atunci f(x) este **constanta** pe acel interval

Mentiuni:
a) Puncte de extrem: Prin studiul semnului lui f'(x) se poate analiza monotonia functiei f(x) (crescatoare / descrescatoare) si pe baza monotoniei se pot stabili punctele de extrem ale functiei (minim respectiv maxim).
b) Avansat: Interpretarea geometrica a teoremei lui Lagrange.

---

4. Teorema lui Cauchy

Fie functiile f(x) si g(x), un interval I si doua numere a,b, cu a<b si a,b $\in$ I.

Daca :

1. Functiile f(x) si g(x) sunt continue pentru x $\in$ [a,b]
2. Functiile f(x) si g(x) sunt derivabile pentru x $\in$ (a,b)
3. Functia g'(x) $\neq$ 0pentru x $\in$ (a,b)

atunci exista un punct **c** intre a si b, astfel incat:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Se observa ca pentru cazul particular g(x)=x, se obtine teorema lui Lagrange.

---

5. Concavitate, convexitate

Notiuni noi :

- Functie convexa, functie concava.

- Punct de inflexiune, punct de intoarcere.

Teorie:
1. Daca f"(x) > 0 , atunci f(x)= **convexa** pe acel interval.
2. Daca f"(x) < 0 , atunci f(x)= **concava** pe acel interval.

---

6. Reprezentarea grafica a functiilor

1. Determinarea domeniului de definitie, scris ca reuniuni de intervale

2. Calcul valori functie(limite functie) la capetele domeniului de definitie

3. Determinare asimptote

4. Intersectie cu axa Ox (se face y=0 si se scoate x)

5. Intersectie cu axa Oy (se face x=0 si se scoate y)

6. Derivata intai : f'=0, rezolvare ecuatie, tabel, monotonie, puncte extrem

7. Derivata a doua:f"=0, rezolvare ecuatie, tabel, concavitate/convexitate

8. Tabel general

9. Trasare grafic

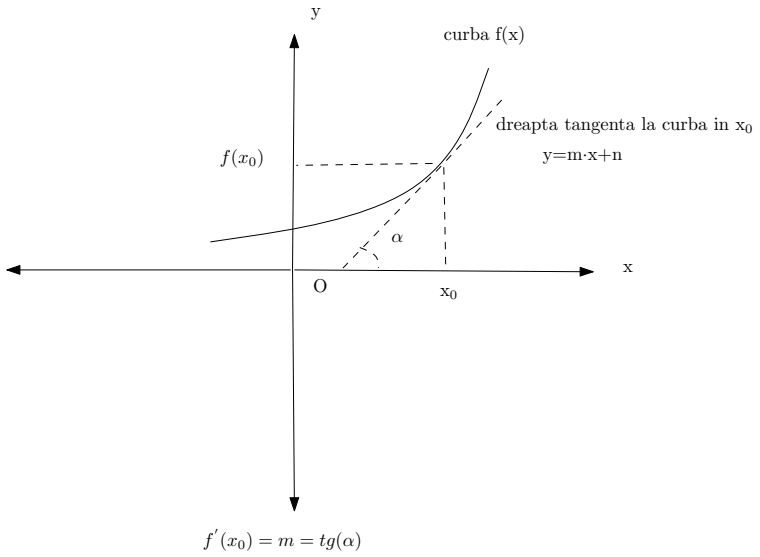
Memo 30 Interpretarea geometrica a derivatei

Interpretarea geometrica a derivatei:

• Se reaminteste ca derivata unei functii f(x) intr-un punct x_0 este prin definitie:

$$f^{'}(x)_{x=x_0} = f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

• Derivata unei functii f(x) in punctul x_0, notata cu $f^{'}(x_0)$, semnifica **panta dreptei tangente la curba f(x) in punctul x_0,**, unde panta unei drepte reprezenta tangenta unghiului facut de acea dreapta cu axa Ox. Interpretarea geometrica a derivatei reprezentata grafic:



Utile pentru exercitii

Se considera cunoscute urmatoarele:

1. Ecuatia unei drepte care trece printr-un punct (x_0, y_0) si are panta m, este:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

2. Panta **m** a unei drepte de forma $y = m \cdot x + n$, reprezinta tangenta unghiului facut de dreapta cu axa Ox, deci m=tg(α), unde α reprezinta unghiului facut de dreapta cu axa Ox.

3. Conditia ca doua drepte $y_1 = m_1 \cdot x + n_1$ si $y_2 = m_2 \cdot x + n_2$ sa fie paralalele este ca dreptele sa aiba pante egale, adica $m_1 = m_2$.

4. Conditia ca doua drepte $y_1 = m_1 \cdot x + n_1$ si $y_2 = m_2 \cdot x + n_2$ sa fie perpendiculare este ca $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Exercitii

1. Scrieti ecuatia tangentei la curba f(x)=ln(x)+x^2-1 in punctul (e,e^2).

2. Determinati un punct pe curba y=$\frac{x-1}{x+1}$, x$\neq -1$, in care tangenta sa fie paralele cu dreapta y=$\frac{x}{2}$.

3. Determinati constantele α si β, astfel incat curbele de ecuatii:

$$y_1 = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 2 \quad si \quad y_2 = \frac{x-a}{x}, x \neq 0$$

sa fie tangente in punctul x=1, unde $a \in R$ este o valoare cunoscuta.

4. Scrieti ecuatia normalei la parabola $y = x^2 - 4x + 5$ in punctele de intersectie ale acesteia cu dreapta x-y+1=0.

1. Notiunea de integrala

Integrala functiei f(x) se noteaza cu $\int f(x) \cdot dx$. Notatia $\int$ reprezinta un S *lungit* , litera S provenind de la cuvantul Suprafata. Se va vedea in continuare ca una dintre cele mai importante aplicatii ale integralelor este calculul de suprafete.

2. Tabel integrale

$$
\begin{array}{lcl}
\int x^n \cdot dx & = & \frac{x^{n+1}}{n+1} \ + \ C, \ \ (n \neq -1) \\
\int a^x \cdot dx & = & \frac{a^x}{ln(a)} \ + \ C \\
\int \frac{1}{x} \cdot dx & = & ln|x| \ + \ C \\
\int \frac{1}{x+a} \cdot dx & = & ln|x+a| \ + \ C \\
\int \frac{1}{x^2-a^2} \cdot dx & = & \frac{1}{2 \cdot a} \cdot ln|\frac{x-a}{x+a}| \ + \ C \\
\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx & = & \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} \ + \ C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot dx & = & ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| \ + \ C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot dx & = & ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| \ + \ C \\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx & = & arcsin\frac{x}{a} \ + \ C \\
\int sin(x) \cdot dx & = & -cos(x) \ + \ C \\
\int cos(x) \cdot dx & = & sin(x) \ + \ C \\
\int \frac{1}{cos^2(x)} \cdot dx & = & tg(x) \ + \ C \\
\int \frac{1}{sin^2(x)} \cdot dx & = & -ctg(x) \ + \ C \\
\int tg(x) \cdot dx & = & -ln|cos(x)| \ + \ C \\
\int ctg(x) \cdot dx & = & ln|sin(x)| \ + \ C
\end{array}
$$

3. Metode de calcul integrale

1) Metoda substitutiei: implica **retete de rezolvare**
2) Metoda integrarii prin parti:

$$\int f \cdot g^{'} \cdot dx = f \cdot g - \int f^{'} \cdot g \cdot dx$$

4. Integrale definite. Formula lui Leibnitz-Newton

- Fie F(x) primitiva functiei f(x), adica $\int f(x) \cdot dx = F(x)$
- Formula lui Leibnitz-Newton:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

5. Integrale definite. Metoda integrarii prin parti

$$\int_a^b f \cdot g^{'} \cdot dx = f \cdot g|_a^b - \int_a^b f^{'} \cdot g \cdot dx$$

6. Operatii cu integrale

$\int (f+g) \cdot dx = \int f \cdot dx + \int g \cdot dx$

$\int (f-g) \cdot dx = \int f \cdot dx - \int g \cdot dx$

$\int k \cdot f \cdot dx = k \cdot \int f \cdot dx$, unde k= constanta

Formulele anterioare sunt valabile atat pentru integrale nedefinite cat si pentru integrale definite.

7. Subtilitati privind integralele

- Sume Rieman, aplicatii la calcul de limite de siruri
- Sume Darboux
- Functii integrabile

8. Aplicatii ale integralelor definite

Fie o functie f(x), sistemul cartezian XOY, o dreapta x=a si o dreapta x=b

- Fie S = suprafata curbei marginite de f(x), x=a, x=b si Ox

$$S = \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

- Fie V = volumul corpului obtinut prin rotirea curbei marginite de f(x), x=a, x=b in jurul axei Ox.

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \cdot dx$$

- Fie l_c = lungimea curbei f(x) , intre x=a si x=b

$$l_c = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)} \cdot dx$$

- Fie A = aria laterala a corpului obtinut prin rotirea curbei marginite de f(x), x=a, x=b in jurul axei Ox.

$$A = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1 + (f')^2} \cdot dx$$

- Fie $G(x_g, y_g)$ centrul de greutate al placii marginite de f(x), x=a, x=b, Ox. Coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_g = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx} \qquad y_g = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b f^2(x) \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx}$$

Memo 32 Tabel derivate si Tabel integrale

1. Tabel derivate

Functia	Derivata
k(=constanta)	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot ln(a)$
e^x	e^x
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos(x)^2}$
$ctg(x)$	$-\frac{1}{sin(x)^2}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

2. Tabel integrale

$$
\begin{array}{lcl}
\int x^n \cdot dx & = & \frac{x^{n+1}}{n+1} \ + \ C, \ (n \neq -1) \\
\int a^x \cdot dx & = & \frac{a^x}{ln(a)} \ + \ C \\
\int \frac{1}{x} \cdot dx & = & ln|x| \ + \ C \\
\int \frac{1}{x+a} \cdot dx & = & ln|x+a| \ + \ C \\
\int \frac{1}{x^2-a^2} \cdot dx & = & \frac{1}{2 \cdot a} \cdot ln|\frac{x-a}{x+a}| \ + \ C \\
\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx & = & \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} \ + \ C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot dx & = & ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| \ + \ C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot dx & = & ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| \ + \ C \\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx & = & arcsin\frac{x}{a} \ + \ C \\
\int sin(x) \cdot dx & = & -cos(x) \ + \ C \\
\int cos(x) \cdot dx & = & sin(x) \ + \ C \\
\int \frac{1}{cos^2(x)} \cdot dx & = & tg(x) \ + \ C \\
\int \frac{1}{sin^2(x)} \cdot dx & = & -ctg(x) \ + \ C \\
\int tg(x) \cdot dx & = & -ln|cos(x)| \ + \ C \\
\int ctg(x) \cdot dx & = & ln|sin(x)| \ + \ C
\end{array}
$$

Memo 33 Tabel derivate si Tabel integrale pe o pagina

1. Tabel derivate

Functia	Derivata
k(=constanta)	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot ln(a)$
e^x	e^x
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos(x)^2}$
$ctg(x)$	$-\frac{1}{sin(x)^2}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

2. Tabel integrale

$\int x^n \cdot dx$	$=$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ (n \neq -1)$
$\int a^x \cdot dx$	$=$	$\frac{a^x}{ln(a)} + C$
$\int \frac{1}{x} \cdot dx$	$=$	$ln\|x\| + C$
$\int \frac{1}{x+a} \cdot dx$	$=$	$ln\|x+a\| + C$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} \cdot dx$	$=$	$\frac{1}{2 \cdot a} \cdot ln\|\frac{x-a}{x+a}\| + C$
$\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx$	$=$	$\frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot dx$	$=$	$ln\|x+\sqrt{x^2+a^2}\| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot dx$	$=$	$ln\|x+\sqrt{x^2-a^2}\| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx$	$=$	$arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int sin(x) \cdot dx$	$=$	$-cos(x) + C$
$\int cos(x) \cdot dx$	$=$	$sin(x) + C$
$\int \frac{1}{cos^2(x)} \cdot dx$	$=$	$tg(x) + C$
$\int \frac{1}{sin^2(x)} \cdot dx$	$=$	$-ctg(x) + C$
$\int tg(x) \cdot dx$	$=$	$-ln\|cos(x)\| + C$
$\int ctg(x) \cdot dx$	$=$	$ln\|sin(x)\| + C$

Grup

Fie o multime A nevida si o operatie $*$

De exemplu A=R si $*$: R x R $->$ R, unde x$*$y=x+y-xy

(A,$*$) este **grup** daca sunt indeplinite conditiile de parte stabila, asociativitate, element neutru, element simetric. Daca in plus este indeplinita si comutativitatea, grupul se numeste grup comutativ sau grup abelian.

1. Parte stabila :

Pentru orice x $\in$ A si y $\in$ A $\rightarrow$ x$*$y $\in$ A

2. Asociativitate :

Pentru orice x,y,z $\in$ A , avem x$*$(y$*$z)=(x$*$y)$*$z

3. Element neutru :

Pentru orice x $\in$ A , exista un element e $\in$ A astfel incat x$*$e=e$*$x=x

4. Element simetric :

Pentru orice x $\in$ A , exista un element x' $\in$ A astfel incat x$*$x'=x'$*$x=e

5. Comutativitate :

Pentru orice x,y $\in$ A , x$*$y=y$*$x

Exemple de grupuri:

a) (R,+) Element neutru e=0. Simetric de exemplu pt x=7, este x'=-7

b) $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ Element neutru e=1. Simetric de exemplu pt x=7, este x'=$\frac{1}{7}$

Monoid

Fie o multime A nevida si o operatie $*$

(A,$*$) este **monoid** daca sunt indeplinite conditiile de asociativitate si element neutru, adica:

1. Asociativitate :

Pentru orice x,y,z $\in$ A , avem x$*$(y$*$z)=(x$*$y)$*$z

2. Element neutru :

Pentru orice x $\in$ A , exista un element e $\in$ A astfel incat x$*$e=e$*$x=x

Inel

Fie o multime A nevida si doua operatii $*$ si $\circ$

(A,$*$,$\circ$) este **inel** daca sunt indeplinite conditiile:

1. (A,$*$) este grup abelian, adica

(A,$*$) = parte stabila

(A,$*$) = asociativitate

(A,$*$) = element neutru

(A,$*$) = element simetric

(A,$*$) = comutativitate

2. (A,$\circ$) este monoid, adica

(A,$\circ$) = asociativitate

(A,$\circ$) = element neutru

3. Operatie $\circ$ (cea cu monoidul) **este distributiva fata de** $*$(cea cu grupul) **atat la stanga cat si la dreapta**, adica:

a) $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$ (distributivitatea lui $\circ$ la stanga fata de $*$)

b) $(y*z)\circ x=(y\circ x)*(z\circ x)$ (distributivitatea lui $\circ$ la dreapta fata de $*$)

Exemplu de inel:

(R,+,$\cdot$) Adunarea este pe rol de $*$ iar inmultirea este pe rol de $\circ$. Se observa ca sunt verificare conditiile de distributivitate ale inmultirii fata de adunare:

a) $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ (distributivitatea inmultirii la stanga fata de adunare)

b) $(y+z)\cdot x=(y\cdot x)+(z\cdot x)$ (distributivitatea inmultirii la dreapta fata de adunare)

Mentiuni

1. Se numeste **inel comutativ**, un inel in care operatia $\circ$ este comutativa.

2. Se numeste **corp**, un inel in care orice element diferit de elementul neutru al lui $*$(cea cu grupul) este inversabil. Daca operatia $\circ$(cea cu monoidul) este comutativa, atunci corpul se numeste **corp comutativ**

Izomorfism

Fie (A,$*$), (B,$\circ$) si o functie f:A $\to$ B

1. Se spune ca avem un **morfism** de la (A,$*$) la (B,$\circ$) prin functia f(x), daca este indeplininta relatia:

$$f(x*y)=f(x)\circ f(y)$$

2. Daca in plus functia f(x) este bijectiva, se spune ca avem **izomorfism**. Deci **izomorfism=morfism + f(x) bijectiva**

Se reaminteste ca o functie este bijectiva, daca este atat injectiva cat si surjectiva.

Capitole necontinute in lucrare:

Scopul lucrarii a fost sintetizarea principalelor instrumente de lucru din matematica de liceu.

Principalul obiectiv a fost ca lucrarea sa fie scurta,
din acest motiv nu s-au tratat decat subiectele considerate strict necesare.

Nu au fost incluse capitole care indeplinesc una din urmatoarele caracteristici: unele sunt prea usoare si se considera deja stiute, altele au fost deja tratate in gimnaziu, unele se folosesc mai rar, altele sunt prea dificile, unele nu sunt cerute de programa de examene, respectiv apar foarte rar sau deloc in subiectele de examene, s.a.m.d.

Astfel de capitole netratate in lucrare sunt urmatoarele:

1.	Geometrie plana in detaliu	Geometrie	IX
2.	Vectori	Geometrie	IX
3.	Geometrie in spatiu	Geometrie	IX
4.	Geometrie analitica (dreapta, cercul, elipsa, hiperbola, parabola)	Geometrie	XI
5.	Functii trigonometrice inverse	Trigonometrie	X
6.	Aplicatiile trigonometriei in geometrie	Trigonometrie	X
7.	Modulul. Partea intreaga	Algebra	IX
8.	Functia de gradul intai	Algebra	IX
9.	Functii compuse, inversa unei functii	Algebra	IX
10.	Discutia naturii si semnului ecuatiei de gradul doi	Algebra	IX
11.	Pozitia radacinilor ecuatiei de gradul doi	Algebra	IX
12.	Sisteme de ecuatii neliniare: omogene, simetrice	Algebra	IX
13.	Inductia matematica	Algebra	IX
14.	Cardinalul unei multimi. Probleme de numarare	Algebra	X
15.	Probabilitati	Algebra	X
16.	Matematici financiare: dobanzi, tva, statistica	Algebra	X
17.	Permutari	Algebra	XI
18.	Siruri: Teorema de convergenta cu epsilon	Analiza	XI
19.	Siruri: Siruri recurente	Analiza	XI
20.	Siruri: Teorema lui Stolz-Cesaro	Analiza	XI
21.	Continuitate: Vecinatati	Analiza	XI
22.	Aplicatii ale teoremei lui Lagrange	Analiza	XI
23.	Grafice de functii in detaliu	Analiza	XI

24.	Formula lui Taylor	Analiza	XI
25.	Rezolvarea ecuatiilor cu sirul lui Rolle.	Analiza	XI
26.	Aproximarea radacinilor ecuatiilor.	Analiza	XI
27.	Clase de resturi	Algebra	XII
28.	Morfisme si izomorfisme	Algebra	XII
29.	Functii integrabile	Analiza	XII
30.	Metode de integrare pentru functii rationale, functii trigonometrice, integrare prin parti in detaliu, formulele lui Euler, substitutiile lui Cebisev, etc.	Analiza	XII
31.	Sume Riemann, sume Darboux, calcul de limite de siruri cu ajutorul integralelor	Analiza	XII
32.	Aplicatiile calculului integral in geometrie detaliat	Analiza	XII

Pentru realizare unei instruiri aprofundate este necesara si studierea acestor capitole din carti adecvate, de exemplu culegerea de Lia Arama pentru Calcul diferential si integral, culegerea de Chiriac pentru Algebra, culegerea de Turtoiu pentru Trigonometrie, din manual pentru vectori si geometrie analitica. Eventual din manualele scolare sau alte surse.

Aceste subiecte netratate din fericire contin in general **concepte compuse** care se bazeaza pe subiectele tratate. Din acest motiv, nefiind notiuni de baza ci notiuni compuse se pot invata de sine statator, in mod izolat, dupa stapanirea cunostintelor de baza. De asemenea apar mai rar in alte probleme decat subiectele de baza.